

I gamberi e la teoria dei giochi

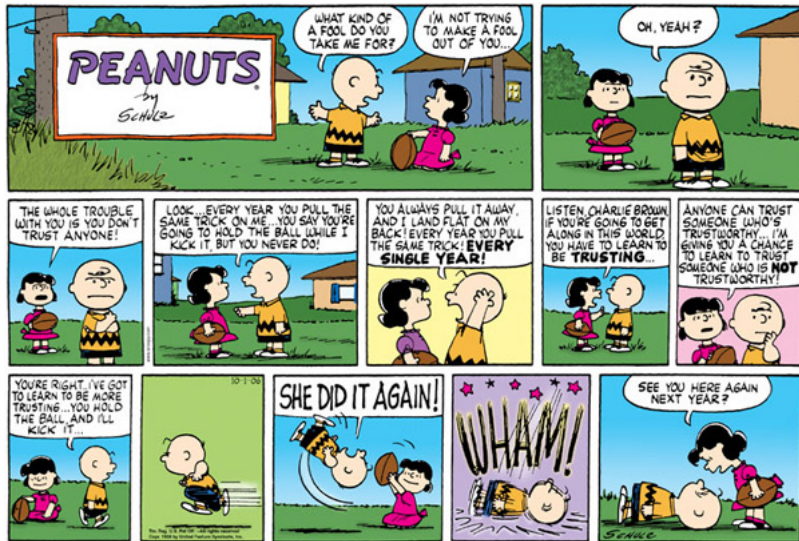
(Look before you leap)

Marco LiCalzi

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

Campus 2010
Quarrata, 30 agosto 2010

Un calcio al pallone



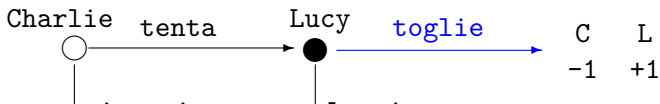
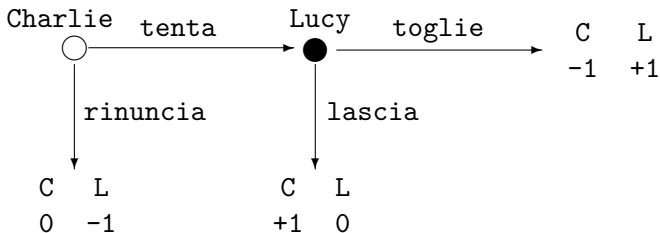
Un calcio al pallone

Lucy promette a Charlie Brown che non tirerà via il pallone.

Charlie Brown può tentare il calcio o rinunciare.

Lucy può tenere fermo il pallone o tirarlo via.

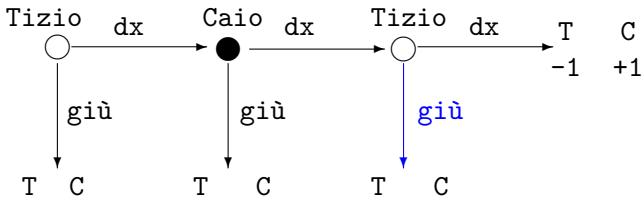
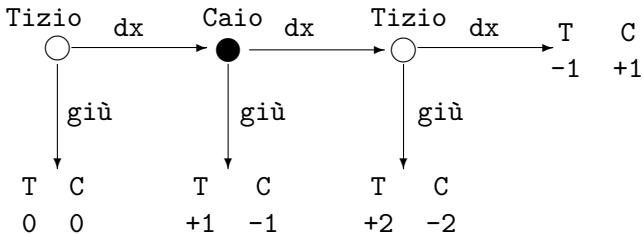
Ciascuno valuta diversamente i possibili esiti: $+1, 0, -1$.



Alberi più lunghi

Tizio e Caio giocano a turno: Tizio gioca due volte e Caio una.

Gli importi sono somme di denaro che l'uno paga all'altro.

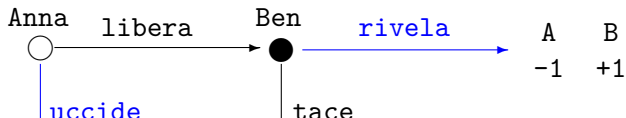
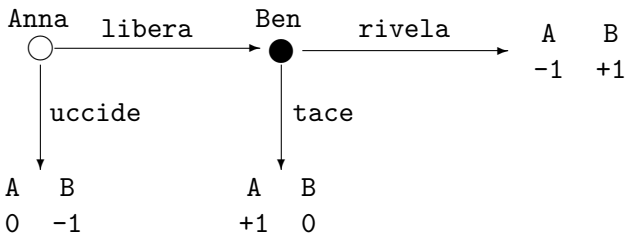


Rapimento e riscatto

Anna ha rapito Ben per chiedere un riscatto.

Dopo il pagamento del riscatto, deve decidere se liberarlo o ucciderlo. Se lo libera, Ben potrebbe rivelare la sua identità.

Ciascuno valuta diversamente i possibili esiti: $+1, 0, -1$.



Rapimento e riscatto

Tratto dal film *Ransom* (1986)

Giochi di pura abilità

Il tris è un gioco di **pura abilità**, come dama, scacchi, hex, nim, etc.

Una giocata **perfetta** conduce al miglior risultato possibile.

Teorema di Zermelo (1913):

Per ogni gioco di pura abilità esiste un modo di giocare perfetto.

Per giocare perfettamente bisogna “risolvere” il gioco:

basta ragionare all'indietro (**induzione retrograda**).

- 1) Giocare in modo perfetto non vuol dire vincere:
se si gioca a tris in modo perfetto, finisce patta.
- 2) Giocare in modo perfetto vuol dire approfittare degli errori altrui:
se l'avversario non gioca in modo perfetto, potete batterlo.

Il gioco del tris

Sketch di una partita:

X				X				X	O	X
	O			O	O			O	O	X
X				X				X	X	O

Se tutti giocano perfettamente, la partita finisce patta.

Un'altra partita:

X	O			X	O			X	O	
X				X				X	X	O
				O				O		X

Se tutti giocano perfettamente, "X" vince la partita.

Rubamonete

Regole

1. Ci sono 21 monete sul tavolo.
2. A turno, uno dei due giocatori scarta da 1 a 3 monete.
3. Vince (e si prende tutte le monete) chi scarta l'ultima moneta.

Domanda

Come si gioca in modo perfetto?

Risposta

[...]

Bandiere invece di monete

1. Ci sono 21 bandiere.
2. A turno, una delle due squadre prende da 1 a 3 bandiere.
3. Vince chi prende l'ultima bandiera.

Tratto da *Survivor Thailand: Episode 6*, in onda nel 2002 in USA.

Come si gioca in modo perfetto?

Partiamo dal fondo. (Ovvero: facciamo *induzione retrograda*!)

Se al tuo turno restano 1/2/3 monete, hai vinto: 1 2 3

“Primo, non prenderle!”: non lasciar mai giù 1/2/3 monete.

Se ci sono 4 monete e tocca a te muovere, hai perso: 4

Se ci sono 5 monete e tocca a te muovere, che fai? 5

Se ci sono 6/7 monete, che fai? 6 7

Se ci sono 8 monete, hai perso. 8

Se ci sono 9/10/11 monete, che fai? 9 10 11

Se sono 12? 12

Quali sono le posizioni da evitare? 16 20

Chi inizia il gioco vince: basta mandare l'avversario in “rosso”.

Analisi

Le posizioni perdenti sono: 4 – 8 – 12 – 16 – 20.

Quindi chi inizia la partita è in posizione perdente.

Ecco che cosa succede in dettaglio:

1. Sook Jai scarta 2 pezzi [19]; Chuay Gahn scarta 2 pezzi [17]
2. Sook Jai scarta 2 pezzi [15]; Chuay Gahn scarta 1 pezzo [14]
3. Sook Jai scarta 1 pezzo [13]; Chuay Gahn scarta 1 pezzo [12]
4. Sook Jai scarta 1 pezzo [11]; Chuay Gahn scarta 2 pezzi [9]
5. Sook Jai scarta 3 pezzi [6]; Chuay Gahn scarta 2 pezzi [4]
6. Sook Jai scarta 3 pezzi [1]; Chuay Gahn scarta 1 pezzo [0]

Varianti sul tema

Gioco dei bâtonnets

1. Ci sono 20 bastoncini sul tavolo.
2. A turno, uno dei due giocatori scarta da 1 a 3 bastoncini.
3. Perde chi scarta l'ultimo bastoncino.

Tratto dal format *Fort Boyard*, in onda dal 1990.
(In Italia solo un pilota nel 1992.)

Analisi

Le posizioni perdenti sono: 1 – 5 – 9 – 13 – 17.

Quindi chi inizia la partita è in posizione vincente.

Ecco che cosa succede in dettaglio:

1. L'uomo scarta 2 pezzi ma 18 è vincente (per l'altro): errore!
2. La donna scarta 2 pezzi ma 16 è vincente (per l'altro): errore!
3. L'uomo scarta 3 pezzi e 13 è perdente: ok.
4. La donna scarta 2 pezzi e 11 è vincente: ok.
5. L'uomo scarta 1 pezzo ma 10 è vincente (per l'altro): errore!
6. La donna scarta 2 pezzi ma 8 è vincente (per l'altro): errore!
7. L'uomo scarta 2 pezzi ma 6 è vincente (per l'altro): errore!
8. La donna scarta 1 pezzo e 5 è perdente: ok.
9. L'uomo scarta 3 pezzi e 2 è vincente (per l'altro): ok.
10. La donna scarta 1 pezzo e 1 è perdente (per l'altro): ok.
11. L'uomo scarta l'ultimo pezzo e perde.

Il Piccolo Mago



Il Piccolo Mago: La scommessa

Trucco n. 19

Materiale occorrente: 20 monete

La scommessa _____

Con questo segreto potrai vincere molte scommesse. Disponi in una fila tutte le 20 monete. Scegli uno spettatore e, alternandovi, togliete sempre 1, 2 oppure 3 monete. Perde chi toglie l'ultima moneta.

Il Piccolo Mago: La soluzione

Trucco n. 19

Materiale occorrente: 20 monete

La scommessa

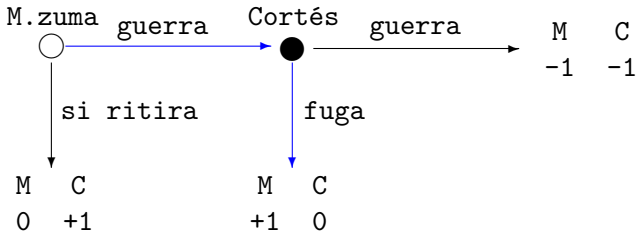
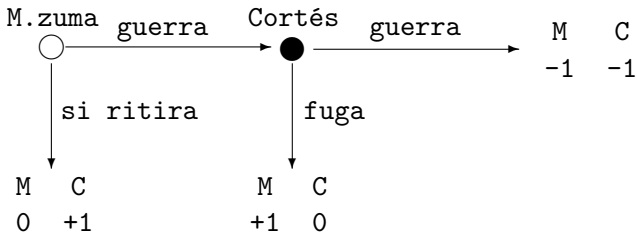
Con questo segreto potrai vincere molte scommesse. Disponi in una fila tutte le 20 monete. Scegli uno spettatore e, alternandovi, togliete sempre 1, 2 oppure 3 monete. Perde chi toglie l'ultima moneta. Se cominci tu, dovrai togliere 3 monete. Poi, lo svolgimento è semplicissimo: se il tuo spettatore toglie 1 moneta, tu dovrai toglierne di seguito 3. Se l'altro toglie 2 monete, anche tu ne toglierai egualmente 2. Se dovesse toglierne 3, tu togli solo una moneta. Proseguendo in questo modo

toccherà a lui togliere l'ultima moneta e vincerai sempre tu. Se comincia lo spettatore dovrai cercare di arrivare a una situazione di partenza di 17, 13, 9 oppure 5 per continuare nella maniera descritta sopra.

Prova da solo questo gioco, facendo anche la parte dello spettatore, in modo da provare tutte le possibili situazioni. Non sfidare nessuno se non sei perfettamente allenato!

L'importanza di legarsi le mani

Nel 1519 Cortés invade l'impero azteco guidato da Montezuma.



Giochi da senatori

Plinio il Giovane (Epistolario, libro 8, lettera 14) racconta una sua esperienza da Presidente del Senato Romano, nel 100 a.C. circa.

Il Senato deve decidere la sorte dei liberti accusati dell'omicidio del console Afranio Destro.

Le mozioni sono tre: rilascio (45%), esilio (35%), pena di morte (20%).

Di prassi si vota in modo binario un'agenda scelta dal Presidente.

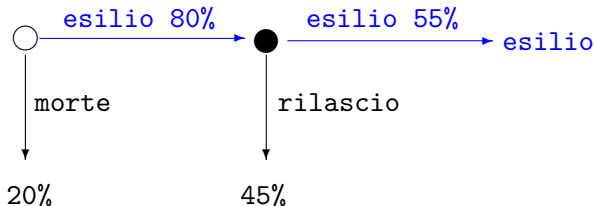
Ad esempio: il Senato sceglie prima fra esilio e condanna a morte, e poi fra l'opzione vincente e il rilascio.

Plinio propugna il rilascio, ma non ha modo di volgere l'esito delle votazioni a suo favore.

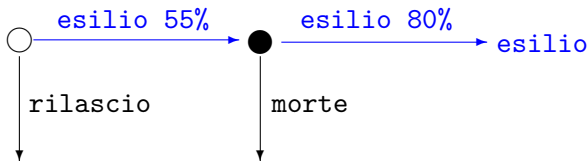
Giochi da senatori

Ci sono tre mozioni: rilascio (45%), esilio (35%), morte (20%).

Se si vota prima fra esilio e pena di morte, e poi sul rilascio:



Se si vota prima fra esilio e rilascio, e poi sulla pena di morte:



Giochi da senatori

Ci sono tre mozioni: rilascio (45%), esilio (35%), morte (20%).

Se Plinio adotta una votazione binaria, vince “esilio”.

Idea: la mozione per il “rilascio” ha la maggioranza relativa!

Fra molti malumori, Plinio cambia la procedura di voto:

ciascun senatore andrà a sedersi vicino a chi ha proposto la mozione per la quale intende votare.

Guarda prima di votare:

il senatore che ha proposto la mozione di morte va a sedersi accanto a quello che ha proposto l'esilio, portandosi dietro tutti i voti.

Il giudizio di Re Salomone

Due donne si contendono un bambino, sostenendo di esserne la vera madre.

Salomone deve decidere a chi assegnare il bambino.

Salomone propone di dare a ciascuna donna metà del bambino, dopo averlo tagliato in due.

Anna accetta l'offerta, mentre Beth preferisce lasciare il bambino alla rivale.

Salomone riconosce nella scelta di Beth l'amore materno e le assegna il bambino.

In questo caso, la reputazione di saggezza di Salomone ha rischiato grosso. Che cosa sarebbe successo se anche Anna avesse rifiutato?

Il disegno dei meccanismi

La teoria del *disegno dei meccanismi* studia problemi analoghi:

- ▶ sappiamo cosa vorremmo (dare il bimbo alla vera madre);
- ▶ ma l'esito dipende da altri (anche Anna vuole il bimbo)
- ▶ che possono mentire a proprio vantaggio (come fa Anna);
- ▶ bisogna trovare il modo di non farci fregare.

Nel 2007 il premio Nobel per l'Economia è andato a Hurwicz, Maskin e Myerson per avere costruito le basi di questa teoria.

Ma torniamo al nostro esempio:

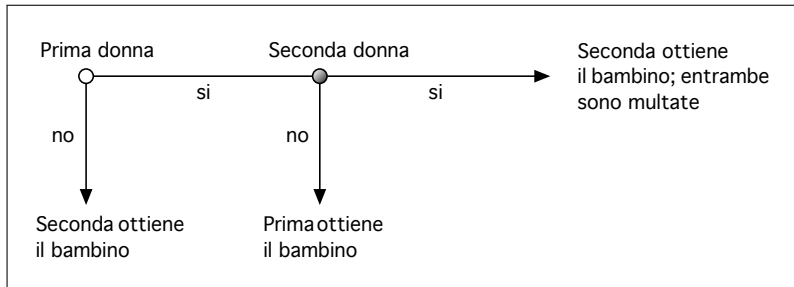
- ▶ come scoprire la vera madre senza rischiare la reputazione.

Un miglior giudizio per re Salomone

Salomone deve scoprire chi è la vera madre.
(Noi sappiamo che è Beth.)

Ecco uno schema che funziona, se Salomone usa la sua saggezza per scegliere una multa che soltanto la vera madre tollererebbe.

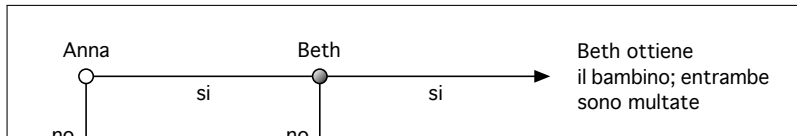
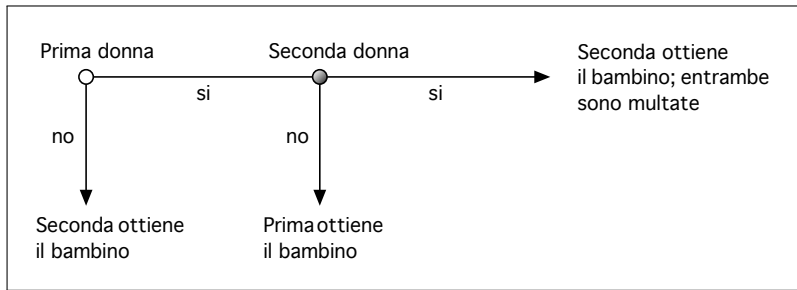
Salomone chiede a turno alle due donne: *“Sei tu la madre?”*



Come funziona?

Salomone deve scoprire chi è la vera madre.
(Noi sappiamo che è Beth.)

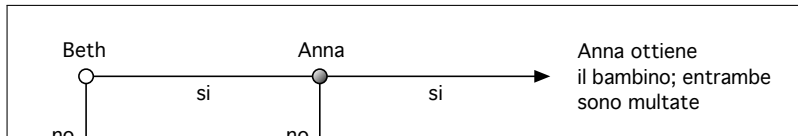
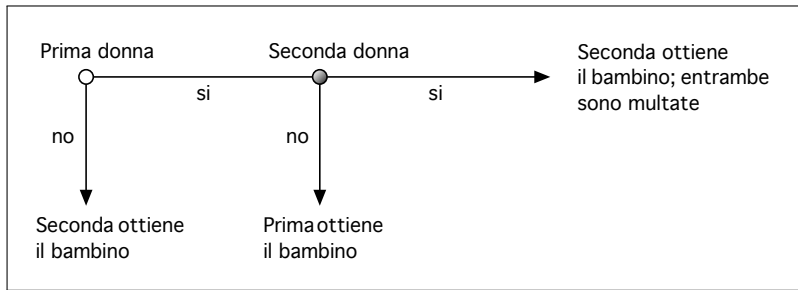
Supponiamo che la prima donna a parlare sia Anna.



Come funziona?

Salomone deve scoprire chi è la vera madre.
(Noi sappiamo che è Beth.)

Adesso supponiamo che la prima donna a parlare sia Beth.



Indovina il numero

Regole

1. Ciascuno di voi gioca contro di me.
2. Ognuno scrive un numero intero fra 0 e 100.
3. Vince chi si avvicina di più alla metà del numero scritto dall'avversario.
4. La partita è patta se le distanze sono uguali.

Domanda

Come giochereste?

Qualcuno non è perfettamente razionale...

E' inutile scrivere un numero maggiore di $(1/2) \times 100 = 50$.

Allora è inutile anche un numero maggiore di $(1/2) \times 50 = 25...$

... e anche uno maggiore di $(1/2) \times 25 = 12.5...$

... e quindi uno maggiore di $(1/2) \times 12.5 = 6.25...$

Metto all'asta 20 euro

Regole

1. Chiunque può fare offerte.
2. L'offerta massima è 50 euro.
3. Ogni offerta deve essere al rialzo. Rialzo minimo: un euro.
4. L'asta termina se trascorre un minuto senza rialzi.
5. Il premio va al più alto offerente, che paga la sua offerta.
6. Anche il secondo più alto offerente paga la sua offerta.

Domanda

Come giochereste?

Come si gioca in modo perfetto? Vedi Teorema di O'Neill (1986), in: Taylor e Pacelli (2008), *Mathematics and Politics*, capp. 6 e 12.

Riferimenti bibliografici

- ▶ K. Binmore, *Game theory: A very short introduction*, Oxford University Press, 2007.
- ▶ F. Colombo, *Introduzione alla teoria dei giochi*, Carocci 2003.
- ▶ E-Y. Gura e M. Maschler, *Insights into game theory*, CUP 2008.
- ▶ A. Dixit e B. Nalebuff, *Io vinco, tu perdi*, Il Sole 24 Ore Pirola, 2004.
- ▶ F. Patrone, *Decisori (razionali) interagenti*, Edizioni Plus 2006.
- ▶ R. Lucchetti, *Di duelli, scacchi e dilemmi*, Bruno Mondadori 2001.
- ▶ A.D. Taylor e A. Pacelli, *Mathematics and politics*, Springer 2008².
- ▶ <http://gametheory.net/students.html>