

Saggistica ARACNE

I45

Fulvio Bongiorno
Andrea Damiani

Avrei voluto capire la matematica



Fermat, *illustrazioni di Mario Ramon Scocco*
Le Simplegadi, *illustrazioni di Flaminia Garau*

Tutti i grafici sono stati realizzati con
Mathematica 7.0 della Wolfram
www.wolfram.com

Copyright © MMIX
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A-B
00173 Roma
(06) 93781065

isbn 978-88-548-3369-2

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: settembre 2010

Indice

Prefazione	7
Antefatto	9
Con le parole	11
Capire	13
Le Simplegadi	19
L'anno bisestile	25
La giornata del risparmio	29
Un'antologia di brani matematici	41
Il Matematico vestito del solo gesso	47
Un professore a sorpresa	55
Primo giorno di scuola	61
Una lezione in borgata	71

Everything is Interesting	79
Ali d'angelo	89
Relatività ristretta	95
Both Are Infinite	99
Antes de Amarte	109
Fermat	117
6 marzo 2009	125
L'integrale di campagna	141
Giacomo Faser, scienziato	161
Trent'anni dopo	165
Coi numeri	171
La pignatta	173
Prima della sosta	179
Il Pallone con le zampe	191
Maturità 2008	205
La Lista della spesa ed altri vettori	217
Il Teorema della Quitandiña	225

Prefazione

In questo libro gli autori hanno raccolto brani tratti da materiale da essi stessi pubblicato o diffuso negli spazi culturali della TV, oppure ricostruito dai loro appunti. Gli scritti prendono l'arco dell'ultimo trentennio. Questo per dire che il lavoro non è improvvisato, ma nasce da stati d'animo vissuti, ripercorsi e poi maturati giorno dopo giorno, nel confronto col sé e con gli altri, in un percorso di esperienze umane e professionali.

Che la matematica sia mediamente poco gradita dagli studenti si sa, se ne parla spesso, si sono scritti articoli sui giornali, libri. L'ultimo che gli autori hanno avuto sotto mano, uscito nel febbraio di quest'anno, è *Contro l'ora di matematica, Un manifesto per la liberazione di professori e studenti*, titolo originale *A mathematician's lament*, di Paul Lockart, pubblicato in Italia da Rizzoli.

Gira da sempre dunque una sensibilità sul problema, una consonanza che nasce dal comune disagio di assistere a come la matematica venga bistrattata, fraintesa, osteggiata dagli umanisti i peggiori dei quali si vantano di non aver capito mai nulla di questa disciplina.

In questo libro la nascita del disagio viene documentata attraverso esperienze di vita vissuta, non solo, ma viene anche analizzata e attribuita di volta in volta, alla disatten-

zione del neofita (il rapporto con la misura, e cioè coi numeri, si presenta nella primissima infanzia), alla negligenza dello studente, alla scarsa preparazione di qualche insegnante, o all'esibizionismo di alcuni scienziati. Questi contenuti si trovano nei racconti della prima parte del libro, raccolti sotto il titolo «Con le parole», dove si espongono anche alcuni criteri utili per superare la difficoltà della comunicazione.

E però il libro ha anche una seconda parte, «Con i numeri», dove viene mostrata l'applicazione di quanto si è detto con le parole.

Può funzionare?

Antonio d'Augenti
Professore di Filosofia della Scienza, Losanna

Antefatto

Questo libro è scritto da noi due: Andrea e Fulvio. Uno è un giovane matematico, giornalista e animatore di trasmissioni radio e televisive. L'altro è il suo vecchio maestro. Il libro verrà scritto in prima persona, ma non diremo mai chi è che sta dicendo. Per creare un minimo di suspense. A meno che a chi legge non gliene fregghi niente di quello che diciamo. In quel caso va bene lo stesso, perché quel genere di lettore abbandonerà presto la lettura, e tanto noi scriviamo per gli altri.

Ok. Fulvio e Andrea non si sono mai persi completamente di vista, perché ognuno dei due ha sempre conservato una certa visibilità nel proprio ambito, ma certamente non si sono frequentati con regolarità per molto tempo: venti, venticinque anni? Ora hanno un progetto in comune, che non si esaurisce, speriamo, con questo libro. È bello potersi dire venticinque anni fa. In un'occasione Fulvio ha scritto nel suo romanzo Naufragi, che un giovane insegnante occasionale di matematica perde di vista tutti i suoi allievi, per il fatto che cambia lavoro, e questa cosa al momento gli da dispiacere; e Fulvio, come autore, riferisce che ne rivedrà solo uno, diversi anni dopo, aggiungendo *quando non c'era più neanche nostalgia*. Una situazione struggente. Per dire che gli eventi, i sentimenti pu-

re, passano senza lasciare il segno, nemmeno di una amara nostalgia.

Nel caso di Andrea e Fulvio la situazione è diversa. Si sono ritrovati perché si sono cercati, ritrovando intatto il patrimonio del loro rapporto e dei loro scambi, perché non è mai vero che l'insegnante insegna e l'allievo apprende e basta: se il feeling è positivo imparano l'uno dall'altro, e sennò si ha un dialogo tra sordomuti.

«Allora dove devo venire?», chiede Fulvio.

«A casa mia. Sai dove abito?»

«La via sì. Lagrange, mi sembra.»

«Infatti.»

«Allora se mi dai il numero, è fatta . . . »

«72».

«72, cos'è? Per esempio 8 per 9, sì?»

«Sai è un modo per ricordarlo», aggiunse.

«Certo che hai proprio un indirizzo da matematico.» Continuò: «Lagrange, e va bene. 72 è 8 per 9, ovvero 2 alla terza per 3 alla seconda. L'esempio di un'operazione non commutativa: l'elevamento a potenza»

Con le parole

Capire

Il sé: è quello che si è stati. E quando si nasce? Veniamo da lontano? Da sempre? Allora andiamo lontano, per sempre?

Assiomi, postulati nella matematica: nella fede religiosa sono i dogmi. Nel nostro discorso sulla conoscenza sono semplicemente i punti di partenza, cioè punti di ancoraggio condivisibili, ovvero non contraddittori con la propria esperienza. Ad essi si può anche concedere di essere perfettibili, cioè possono essere modificati, perfezionati, via via che l'esperienza si affina. Essi possono spostarsi all'indietro se ci si rende conto che in realtà un punto ritenuto di partenza era conseguente a un altro punto che in precedenza ci sfuggiva e ne era la premessa, il vero inizio. Oppure possono essere spostati in avanti ovvero a punti successivi, se un punto successivo diventa talmente familiare che non ha bisogno di richiedere spiegazioni a monte. Uno spostamento come il primo – all'indietro – normalmente è di tipo logico; per esempio stabilire se due raggruppamenti hanno la stessa quantità di oggetti, viene prima del saper contare. Uno spostamento come il secondo è di tipo analitico. Per esempio, si può accettare che due e due fa quattro come punto di partenza, senza sofisticarci su.

Capire: accordare correttamente il mondo del sé col mondo esterno. Cioè in modo che le congetture del sé conseguenti

a quell'adattamento trovino riscontro nel comportamento del mondo esterno. Come accordare uno strumento: cercare le risonanze. In questo senso capire diventa trovare una consonanza che esiste in natura, e questo cammino si addentra all'interno dei fenomeni misteriosi, cioè in quello che è al di là della nostra comprensione: un percorso che ci si presenta dentro le nebbie, con una sequenza di passaggi a caso. Insomma dentro il caos indistinto.

Ma evitiamo di farla difficile.

A due anni, Andrea aveva le idee molto chiare su che cosa significasse «capire». E questo perché a due anni tutti i bambini sanno esattamente che cosa significa capire.

Tutto si basava sulla ripetizione: op . . . un piccolo sforzo, ed ecco che l'orsacchiotto volava fuori dal lettino, superando la sponda.

Orsacchiotto sparito, volatilizzato, cancellato dall'esistenza con un semplice gesto. Poi, una mano amica raccoglieva il peluche e lo riportava all'interno del lettino. Orsacchiotto ri-comparso? No, in prima analisi, si trattava di *un nuovo orsacchiotto*, ma al piccolo Andrea la cosa non interessava poi così tanto: era un altro amico da scagliare giù dal letto, e tanto bastava per tenerlo occupato.

Un giorno, chissà quando e perché, ecco la classica lampadina che si accende: il nuovo orsacchiotto assomiglia molto al vecchio. Anzi, assomiglia moltissimo *a tutti i precedenti!* Hai visto mai si trattasse *dello stesso pupazzo?*

Una conquista fenomenale, un'idea assurda: *gli orsacchiotti esistono anche mentre non li vedo*. Nient'altro che un'ipotesi, naturalmente, un'ipotesi da testare con qualche esperimento.

Già, perché i bambini sono dei piccoli scienziati: formulano ipotesi e sperimentano, vogliono vedere che cosa succede, sono affamati di connessioni che leghino in qualche maniera

le loro osservazioni: i loro neuroni sono lì pronti a creare reti, a codificare conoscenze, concetti, generalizzazioni.

Ed ecco che i voli del povero pupazzo fuori dal lettino diventano sempre più frequenti, frenetici, mentre il piccolo abbozza prima un sorriso, poi decisamente si abbandona alla risata, ecco il momento, l'esperimento è riuscito, l'idea assurda ha trovato conferma, Andrea ha capito: l'orsacchiotto è sempre lo stesso, *esiste anche quando è fuori dal suo campo visivo*.

Una sensazione di piacere quasi fisico, un benessere nuovo e intenso, la voglia di cercare nuove sfide, lo sguardo che cade sul papero verde: *se ha funzionato con l'orso, hai visto mai che anche il papero...*

E vola anche il papero verde giù dal lettino, e poi il cane, e tutto il resto della compagnia: dopo qualche ora il nostro piccolo scienziato, che ancora non parla, non legge e non scrive, ha perfettamente messo a fuoco la sua prima idea metafisica: *gli oggetti esistono anche quando non li vedo!* Passa qualche giorno ed il piccoletto ha costruito la sua prima classe di equivalenza: tutti gli oggetti del lettino possono volare e finire di sotto, tanto poi ricompaiono: ecco che anche il cuscino, il ciuccio, la bottiglia – grazie a Dio infrangibile – decollano e volano via.

Ma dove finiscono?

Il piccolo scienziato è instancabile: prova a seguire le traiettorie, e sta già studiando la Fisica: non può fare a meno di osservare che gli sfortunati pupazzi non volano come uccelli: no, i peluche *cadono*.

E, attenzione, cadono *proprio tutti*.

Magari non la chiamerà forza di gravità, ma Andrea ha già capito che i corpi cadono. Uno sforzo immane sulle minuscole braccia, una coordinazione che non si trova, qualche caduta all'indietro (*è difficile andare verso l'alto e facilissi-*

mo cadere in basso, quindi) ed ecco che finalmente il Nostro è affacciato: lì in basso, ecco i peluche: ora sappiamo dove erano finiti!

«I pupazzi cadono verso il basso, ed anch'io cado!» Ecco che cosa si dice il nostro Andrea, che ancora non conosce le parole per descrivere ciò che ha scoperto, ma già possiede una discreta base concettuale a livello puramente simbolico.

Andrea è felice, ha scoperto tante cose nuove, ha capito, e questo gli dà una sensazione straordinaria, lo diverte, lo incuriosisce.

Per qualche strano motivo, quello che è chiarissimo ed operativo per un bambino di due anni, il concetto del *capire*, diviene poi un mistero per la stragrande maggioranza delle persone adulte. Infatti, è frequente, insegnando matematica, sentirsi dire «scusi prof non ho capito», ma se si chiede all'interlocutore che cosa vuol dire aver capito, scopriremo che non lo sa.

E c'è una seconda circostanza alquanto singolare sulla quale dobbiamo soffermarci. Pensiamo per un momento ai progressi di un bambino tra i due ed i cinque – sei anni: sono semplicemente straordinari: il grado di difficoltà degli argomenti affrontati è fenomenale, ed anche la quantità di nozioni accumulate è impressionante; eppure tutto sembra avvenire con naturalezza. Soprattutto, il processo dell'apprendimento è gioioso e piacevole.

Ora, non occorre essere degli attenti osservatori per accorgersi che l'apprendimento nelle nostre scuole non può essere descritto, nella maggior parte dei casi, come un'attività gioiosa e piacevole.

Chi è il colpevole? Chi trasforma la più bella ed appassionante avventura della mente umana in un incubo, fonte talvolta di complessi e frustrazioni, che sfocia, in casi estremi e per fortuna rari, in episodi tragici?

Ma anche quando le cose sembrano non volgere al brutto, come può questa straordinaria avventura determinare in molti dei nostri ragazzi la tendenza a vivere due vite parallele, una, la mattina, fatta della noia e delle umiliazioni di una scuola percepita come aliena, distante ed incomprensibile, l'altra, il pomeriggio o la notte, fatta di trasgressioni ed eccessi. Difficile non accorgersi che la vita mattutina viene vissuta come imposta dall'alto, dunque «non propria» in quanto non scelta, mentre tutto il resto, per una forma elementare di ribellione, diviene simbolo di autonomia, indipendenza, costruzione di se stessi.

Tutto ciò non può non apparire ironico: per fuggire da quell'avventura affascinante che abbiamo descritto, quella ricerca della conoscenza del mondo e di se stessi che è la chiave di ogni passione, e quindi di ogni libertà, l'adolescente medio finisce per identificarsi con l'illusione di autonomia fornita da un mondo prefabbricato ed organizzato a colpi di pubblicità, mode, programmi radiotelevisivi basati su una rassicurante mediocrità ed un'amichevole idiozia.

Da chi dobbiamo salvare il piccolo scienziato alle prese con i peluche volanti, prima che le sue passioni e le sue curiosità vengano irrimediabilmente demolite e trasfigurate nel volto di un adolescente appiattito nella sua ignoranza alla ricerca di una pillola, di una bottiglia di vodka, di una corsa dissennata in automobile?

Le Simplegadi

Un giorno che Fulvio andò a prendere Fla' alla scuola materna, ebbe in regalo un disegno, quello che potete vedere qui sotto. «Questo l'ho fatto per te», disse laconicamente la bambina, porgendoglielo.

«È la nave Argo», disse Fulvio leggendo sul disegno.

«Sì, e queste sono le Erinni», spiegò Fla', indicando le figure alate.

“Grazie Fla', è molto bello.» Poi continuò.

«A scuola oggi ti hanno raccontato il mito di Giasone alla conquista del vello d'oro?»

«No. La storia di Giasone che va per mare me l'ha raccontata ieri mamma. L'abbiamo letta su quel libro che mi ha regalato zia La'...»

«Quella del vello d'oro?»

«Sì.»

«E tu lo sai cos'è il vello?»

«Sì.»



«E cos'è?»

«È una pecora...»

«Il mantello, precisamente ...»

«Ah.»

«E a bordo chi c'è?»

«Questo con la spada e i pantaloni arancione è Giasone, e quell'altro con quella cosa in mano è un suo amico.»

«Ah.»

«E poi, vedi? Qui ci ho messo un alberello.»

«Sì. Un ramo di quercia. Gliel'aveva regalata Artemide una dea sua amica per proteggere la nave contro i naufragi.»

«Sì, infatti dovevano passare tra due isole che si avvicinano tra loro, per non far passare le navi che vogliono entrare nel mar Nero.»

«Sì. Ti ricordi come si chiamano?»

«No ...»

A questo punto Fla' disse:

«Vieni, andiamo a prendere il libro. Ti faccio vedere dov'è ...»

Così abbiamo visto il disegno della nave con tutti i naviganti a bordo. Abbiamo ripassato che erano cinquanta e quasi tutti dotati di poteri.

Abbiamo letto un po' e a un certo punto abbiamo trovato le isole.

«Eccole. Si chiamano Simplegadi.»

Chissà che vuol dire esattamente. Sim... deve avere la radice semantica di sintesi e forse c'entra anche la derivazione di Egadi, le isole di fronte alla costa sud occidentale della Sicilia: piccolo arcipelago, gruppetto, plesso, complesso, unione.

Al matematico non può non venire in mente il metodo del simpleso, che si usa nei problemi di ottimizzazione ...

Infatti lessero dopo che erano due isole situate all'ingresso del Ponto Eusino, che si scontravano continuamente fra loro, e costituivano perciò un pericolo per i marinai.

Ah, sono due isole che si scontrano ... Pericolose per i marinai, eh certo. Una sorta dei nostri scogli Scilla e Cariddi, che però non si scontrano, pensò Fulvio.

«Ma tu pensi veramente che le isole si scontravano tra di loro, quando ci passavano in mezzo le navi?» le chiese Fulvio.

«Ma quando ci passa in mezzo Giasone», fu pronta Fla', «Artemide manda un'onda dietro la nave che la spinge in avanti forte forte, e le isole non fanno in tempo a schiacciarla ...»

Ma come nascono le leggende degli Scogli Erranti, o Isole Danzanti nella mitologia antica? Perché di questo si tratta, pensò Fulvio, e s'immaginò d'essere su una nave a vela e remi, com'era l'Argo, in un tempo antico. Dev'essersi trattato di una trasposizione inconsapevole degli effetti della relatività del moto, si rispose.

Col mare grosso e le onde alte, magari anche col vento, la nave sbanda e si avvicina ora da una parte e ora dall'altra, insomma a una e poi all'altra delle isole. E così ai marinai sembrava che il passaggio si stringesse, perché di fatto la distanza relativa tra la nave e gli scogli si accorciava, e anche,

per l'esito combinato di beccheggio e rollio, poteva apparire che le rocce si richiudessero su di loro.

Oppure al contrario, nella baraonda del mare agitato che si alza e si abbassa, quando l'acqua si ritira tra gli scogli porta alla luce la piattaforma tettonica degli isolotti, e può accadere che la nave si schianti sulla pietra dura. In questo caso le isole effettivamente si fondono e le cime, per l'effetto prospettico dell'innalzamento delle pareti rocciose, sembrano più vicine. In questa situazione, quando poi il mare si richiude, i marinai vanno incontro a morte sicura.

«E questo dev'essere Orfeo», disse Fulvio, rinunciando a discutere con Fla' sui moti relativi e sulla trasposizione dei loro effetti ottici nella mitologia. «Vedi? Ha in mano una lira. Uno strumento musicale antico. Lui suonava bene. E cantava anche meglio.»

«E tu che ne sai?»

«Lo so, perché c'è un'altra storia su di lui ...»

«E me la dici?»

«Orfeo aveva una moglie molto bella che si chiamava Euridice. Però lei purtroppo morì presto. Ma Orfeo non riuscì a stare senza di lei, e allora decise di scendere nel regno dei morti per chiedere al re Plutone di dargli indietro la sua bella Euridice.»

«E il re dei morti che ha fatto?»

«Plutone? Commosso dal canto e dal suono della lira, Plutone gli disse: Va bene Orfeo permetterò che Euridice ritorni con te nel regno dei vivi. A un patto però. Che tu vada avanti verso l'uscita continuando a suonare e cantare come hai fatto qui, senza voltarti mai. Altrimenti ...»

«Plutone ha mantenuto la promessa?» chiese Fla'.

Che devo fare?, s'interrogò Fulvio.

«Sì. Di sicuro. Ma non mi ricordo più com'è andata a finire esattamente. Ma tra un po' di tempo, quando tu

intanto sarai cresciuta, vedrai che mi tornerà in mente ...» decise di dire.

Non tanto per non deluderla al momento. Fulvio pensava che quello di voltarsi a guardare fosse stato un errore plateale di Orfeo. Plutone in sostanza gli chiedeva fiducia, e lui, voltandosi, non gliel'aveva accordata. Se invece fosse andato avanti senza voltarsi, con la fiducia nella promessa del dio, avrebbe sentito Euridice vicina, dietro di sé. E questa cosa sarebbe successa per sempre, se non si fosse voltato mai.

Come succede che ci portiamo dentro le persone care, anche quando non ci sono più. E crescendo, Fla' queste cose le avrebbe capite per conto suo.

«Dai Flà, disegnami le Simplegadi, ché sul libro non le vedo...» propose come diversivo Fulvio.

Il disegno di Fla' è quello qui sotto. Si può vedere che lei ci ha messo dentro anche le cose che Fulvio non le aveva detto, perché le stava pensando allora allora: il mar Nero che si alza nella strettoia, e le rocce che si rinchiudono sulle sommità.



L'anno bisestile

Ruhna, racconta Fulvio¹, era al tempo dell'ultima guerra, una bambina che abitava a Polizzi Generosa, un paesino della Sicilia montana affacciato sulla valle del fiume Imera.

Il conflitto per la verità era terminato, ma i suoi effetti ancora si sentivano: per esempio il padre di Ruhna, prigioniero in India alle falde dell'Himalaya, non era ancora stato rilasciato.

Ok, Ruhna aveva 6 anni e frequentava la prima elementare nella scuola pubblica di Polizzi che si trovava sullo stradale all'ingresso del paese. La bambina era affetta da nevrosi, si direbbe oggi, perché, eradicata da Roma dov'era nata e c'era il suo ambiente, viveva sola con sua madre in questo paese di montagna dove non avevano legami importanti con nessuno. Per questa ragione ogni tanto la malinconia si faceva disperazione e lei, chiedendo alla maestra di andare in bagno, se la filava a casa dalla sua mamma.

Ma la maestra, la signora Tedesco, voleva bene a Ruhna, e passava sopra a queste scappatelle. Anzi, qualche volta che aveva percepito un particolare stato di depressione della bambina, aveva permesso alla madre, con qualche scusa, di trattenersi in aula ad assistere alla lezione.

¹ F. Bongiorno, *Il percorso dei segni*, Aracne editrice, Roma 2001.

«Non lo farei questo», aveva detto una volta, «nemmeno per la figlia del Re», Re con la maiuscola, perché allora, eh già, ancora, ad onta della fuga all'estero dei regnanti, si era in regime di monarchia.

Una di quelle volte la signora Tedesco stava spiegando dei giorni, che hanno ciascuno ventiquattro ore e dei mesi, che non hanno tutti lo stesso numero di giorni.

«Aprite il libro a pagina 30», aveva detto. «Vedete? C'è una filastrocca. Dopo ve la leggo.» E continuò.

«I mesi, come vi ho detto, non hanno tutti lo stesso numero di giorni. Ne possono avere 30 o 31.» E aveva mostrato sulle nocche e gli incavi delle quattro dita della mano chiusa, qual è la sequenza corretta dei numeri. «Poi c'è Febbraio, il mese capriccioso, che fa eccezione. Quasi sempre ne ha 28. Ma una volta ogni 4 anni, ma con un'altra eccezione che per ora non vi dico, perché oltretutto non ci riguarderà da vicino, ne ha 29». A quel punto aveva letto la filastrocca del sillabario, invitando anche i bambini a fare coro leggendo ad alta voce.

«Trenta giorni ha novembre
Con april giugno e settembre
Di ventotto ve n'è uno
Tutti gli altri ne han trentuno. . . »

«Allora un anno non ha sempre lo stesso numero di giorni?» chiese Quattrocchi alla fine, un bimbo grassoccio, quattrocchi di nome e di fatto, perché portava gli occhiali.

«Bravo Quattrocchi. In effetti ogni anno dura 365 giorni e sei ore. Ma se si sommano il numero dei giorni di ogni mese, si trova che normalmente un anno ha 365 giorni mentre ogni 4 anni ne ha 356 e si chiama anno bisestile».

«E porta sfortuna, dice mia nonna», s'inserì Carmelina, la figlia del mezzadro degli Zerbo, la famigli nobile di Polizzi.

«Questo succedeva ai tempi di tua nonna», tenne a precisare la signora Tedesco. «Ora non è più così.»

«Attenzione», disse poi. «Ora vi faccio una domanda difficile. Perché si aggiunge un giorno ogni quattro anni e non dopo 5 oppure 6?» I ragazzini rumoreggiarono, ma poi Quattrocchi, che era tra i più bravi alzò la mano.

«Sentiamo», disse la maestra.

«Perché 6 per 4 fa 24».

«Bravo Quattrocchi. Proprio così. Mettendo insieme le sei ore che avanzano ogni anno si fanno ventiquattr'ore, ossia un giorno».

Mentre la maestra parlava, Ruhna aveva alzato la mano.

«Che c'è Ruhna?» chiese la signora Tedesco.

«Ma come si fa a conservare le sei ore che avanzano ogni anno per metterle insieme nel quarto anno e farci un giorno?»

Quattrocchi rise. La maestra lì per lì non disse nulla, ma altri bambini si aggiunsero alla risata. Allora lei con dolcezza disse.

«Ma che dici Ruhna. Vedi che fai ridere i compagni?»

Ruhna rimase male e se ne restò zitta. E non pose l'altra domanda che aveva in testa.»

«Febbraio», pensava, «dev'essere lui il figlio del Re, perché facendo Gennaio e Marzo di 30 giorni invece che di 31, anche Febbraio ne potrebbe avere sempre 30, e si potrebbero dare trentun giorni a Gennaio ogni 4 anni».

La giornata del risparmio

Prima metà degli anni 70: tempi di austerità (la domenica si andava in bicicletta, perché di benzina ce n'era poca). Andrea era in quarta elementare, abitava in una cittadina industriale della Toscana. Per qualche motivo, probabilmente collegato con il tasso di inflazione a due cifre caratteristico di quegli anni, era anche il periodo della mania del risparmio. A scuola erano comparsi opuscoli illustrati, salvadanai giganti, addirittura un gioco in scatola sul tema (no, non c'erano computer e videogiochi): si trattava di accumulare un piccolo gruzzolo svolgendo dei lavoretti e poi andare in giro per la città difendendolo dalle varie insidie: bar, pizzerie, luna park e così via. Vinceva chi spendeva di meno. Una noia mortale.

Il padre di Andrea, un pragmatico direttore di banca, decise di fare la sua parte. Propose un patto: alla fine di ogni anno avrebbe regalato al piccolo risparmiatore una cifra proporzionale alla quantità di denaro presente sul suo personalissimo libretto bancario. Per ogni mille lire ne avrebbe aggiunte 120.

Niente male, vero? naturalmente, aveva spiegato, il denaro doveva essere presente sul libretto per tutto l'anno, al-

trimenti avrebbe fruttato di meno: ad esempio, se ci fossero state 10.000 lire per tre mesi, cioè un quarto di anno, alla fine non sarebbero state aggiunte 1.200 lire, bensì 300, cioè un quarto di 1.200.

Andrea, per capire rapidamente il meccanismo, chiese di poter fare il calcolo ogni mese. La cosa venne concessa, naturalmente dividendo per dodici: ogni mese avrebbe ricevuto 10 lire ogni 1.000 presenti sul libretto. Così, dopo il primo mese, le 50.000 lire presenti ne fruttarono 500. Il mese dopo, però, sul libretto c'erano 50.500 lire, per cui ne arrivarono ben 505.

Ancora un mese, stavolta 510 lire: man mano il gruzzolo cresceva.

Se Andrea avesse avuto, all'epoca, una buona dimestichezza con simboli e formule, avrebbe sintetizzato il tutto con una formula:

$$C_f(C, i, p) = C \left(\frac{i}{100p} + 1 \right)^p$$

dove

C = Capitale iniziale

C_f = Capitale finale

i = tasso di interesse annuale

p = numero di periodi

E forse avrebbe usato un computer per calcolare il gruzzolo dopo dodici mesi: 56.341,30 lire!

Ma che cosa succedeva dividendo l'anno in un numero ancora più grande di periodi?

Fece un po' di conti a mano, e si accorse che il capitale finale aumentava: ad esempio, con $p = 24$, equivalente a calcolare ed aggiungere gli interessi ogni quindici giorni (quello che le banche chiamano capitalizzazione), dopo qualche ora di calcoli ottenne 56.358 lire.

Incoraggiato dalla tendenza positiva, provò con $p = 36$, equivalente a capitalizzare ogni 10 giorni. Il risultato fu 56.363 lire.

Insomma, aumentando p , si ottenevano risultati finali sempre crescenti.

A questo punto saltò direttamente alle conclusioni: sarebbe bastato aumentare il valore di p per ottenere un risultato finale grande a piacere!

Per un bambino di quarta elementare non era male. Purtroppo, però, era anche sbagliato.

La convinzione errata nasceva dalla scoperta, giusta, che, facendo p più grande, veniva aggiunto qualcosa al risultato, qualcosa di positivo. Quindi, nella mente di un bambino, la conseguenza fu chiara: *aggiungendo un numero sufficientemente alto di termini, posso raggiungere un numero grande quanto voglio!*

La maestra, quando le venne sottoposta la scoperta, ebbe una specie di attacco di nervi. Probabilmente non andava eccessivamente d'accordo con l'Analisi Matematica: si limitava a enunciare e far imparare a memoria le «regole» e a far risolvere i problemi.

In effetti l'insegnante, che tra l'altro era straordinariamente brava nelle materie letterarie, non aveva capito nulla di quello che era successo; ad esempio non colse l'occasione per premiare il lavoro di un alunno che aveva trascorso interi pomeriggi a fare conti, per il puro gusto di provare e sperimentare, farsi un'idea, ricercare; in una parola, non aveva saputo cogliere ed incentivare la passione. Fortunatamente, il Nostro fu così testardo da non lasciarsi scoraggiare. Cancellò mentalmente la maestra dall'elenco dei suoi consulenti matematici e continuò a coltivare le sue curiosità in privato.

Ma a ripensarci a distanza di tempo, furono gravi i danni prodotti da questo avvenimento. Infatti, nella mente del

piccolo matematico si insinuò il sospetto di essere più bravo della maestra. E poi più bravo di molti, di troppi. All'esame di quinta, il presidente di commissione, vedendo le votazioni esorbitanti, scrisse alla lavagna ghignando sotto i baffi:

$$2x = 3$$

E, mentre si girava per spiegare l'esercizio, un'equazione di primo grado che certamente non faceva parte del programma delle scuole elementari, fu freddato da un «tre mezzi» talmente rapido che il poveretto lo attribuì ad un suggerimento della maestra. Chiese quindi, col chiaro intento di fregare il giovane candidato, perché faceva tre mezzi? «Perché se moltiplico due per tre mezzi viene tre!» fu la risposta immediata. Il presidente contemplò per qualche momento la risposta, non ci si ritrovò, perché gli avevano insegnato a risolvere le equazioni applicando la formula e facendo i conti ma non gli avevano mai detto perché veniva così. Andrea lo vide in crisi e lo finì con un disarmante: «Tre mezzi, provi anche lei: viene!»

Il severo presidente ammise sportivamente la sconfitta, e l'esame fu un trionfo.

Solo che, in questo modo, Andrea si convinse che la Matematica era meglio studiarla per conto proprio, che tanto a scuola erano solo regole ed esercizi, ma le cose che lo appassionavano veramente erano altrove. L'intuito lo portò tranquillamente col massimo dei voti fino al terzo scientifico, quando finalmente trovò qualcuno con cui parlare: fu immediata la sensazione che il nuovo prof la pensasse come lui, e che condividesse la sua stessa passione per la materia. E poi era bravo, spiegava le cose, ti sfidava ad andare più lontano, ed aveva l'abilità di farti incuriosire. E che diamine! Finalmente tre anni di matematica vera.

Probabilmente, senza quell'incontro, Andrea sarebbe stato solo uno dei tanti studenti «bravi in matematica» che poi nella vita fanno qualcos'altro, e perdono l'occasione di coltivare le proprie passioni.

E senza la sua testardaggine, forse non sarebbe stato neppure bravo in matematica. Quanti bambini dimenticano le proprie curiosità davanti ad una maestra che non sa riconoscere la profondità, il valore assoluto di certi dubbi? Quanti si scoraggiano sentendosi fare domande poste al solo scopo di ingannare? E ancora, quanti si sentono stupidi per non aver capito una spiegazione, quando magari la spiegazione stessa era incomprensibile?

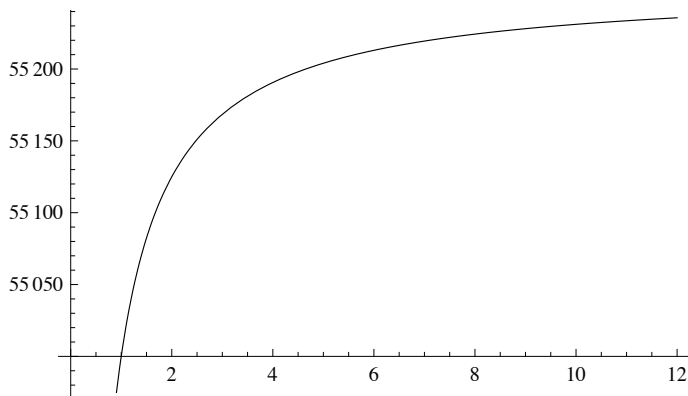
Non c'è dubbio che esistano alunni svogliati e disattenti, ma probabilmente esistono anche insegnanti che vanno avanti a regole ed esercizi, parlano e non ascoltano, entrano in aula come si sale su un palcoscenico, ma con la predisposizione di chi non accetta i fischi.

Insomma, per una serie di motivi, Andrea si trascinò la sua errata convinzione sul calcolo degli interessi fino all'ultimo anno di Liceo.

Perché fu allora che il prof, quello bravo, raccontò quante cose interessanti si possono fare con i grafici di funzioni, e così si accese improvvisamente la lampadina. *Hai visto mai che è un asintoto?* Questo fu l'interrogativo che balenò nella mente del diciottenne Andrea.

Scrisse un programma col suo computer nuovo di zecca, un Commodore 64. Serviva per tracciare i valori di C_f in corrispondenza a diversi p . Era terribilmente lento: nulla a che spartire con i software moderni che ti consentono di prendere i grafici tridimensionali col mouse, spostarli, ruotarli... Niente di tutto questo: il rudimentale programmino respirava a fatica, e molte volte si piantava per una divisione per zero o altri casini.

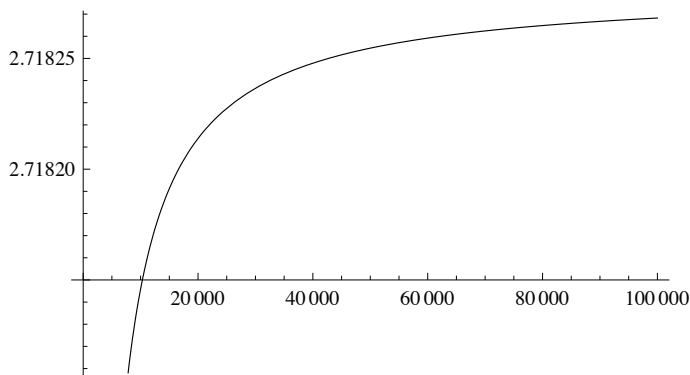
Però, quando funzionava, faceva il suo lavoro: Andrea digitò la famigerata funzione C ed ecco che cosa uscì fuori:



Beh, in effetti no: all'epoca non si lavorava in alta risoluzione, il grafico era molto più sgranato, e poi si vedeva solo sullo schermo: stamparlo era un lusso riservato alla NASA e a pochi altri. Però, insomma, ci siamo capiti.

Andrea pensò di normalizzare (cioè prendere un capitale iniziale uguale a 1 ed un interesse del 100%),

Ora, disponendo di un moderno programma per il calcolo numerico, è possibile fare acrobazie tipo calcolare il valore di questa funzione (e tracciarne il grafico) anche per $p = 1.000.000$ o $10.000.000$. si ottiene, rispettivamente, 2.7182805 e 2.7182817, che, obiettivamente, a mano non è poi così immediato (provate se volete, ma preparatevi molta carta e tantissimo tempo).



Insomma, l'idea originaria di un capitale che cresce all'infinito era sbagliata: in realtà, rendendo numerosi a piacere i periodi di capitalizzazione, o, ciò che è lo stesso, rendendo piccoli a piacere gli intervalli temporali in cui viene suddiviso il periodo sotto osservazione, la quantità

$$\left(\frac{1}{p} + 1\right)^p$$

si mantiene limitata, ed approssima, come si dimostra in Analisi Matematica, un numero ben preciso, una costante universale alla quale è stato dato il nome di Numero di Nepero, viene indicata col simbolo e e vale circa 2.71828183 (sono solo le nove cifre più significative, in realtà ne ha infinite, e non è periodico, si tratta di un numero trascendente, appartenente cioè alla stessa famiglia di π).

Ma che cosa c'era di sbagliato nel ragionamento del piccolo Andrea?

Certamente non il fatto che, al crescere del numero dei periodi, cresce anche la somma finale: ad ogni passo si aggiunge una quantità positiva, e questo è assolutamente accertato.

Ma allora? È del tutto ovvio che, aggiungendo via via quantità positive, il risultato aumenta a dismisura, vero?

No, falso.

È proprio qui il punto: e a pensarci bene, non è nemmeno troppo astruso.

Ovviamente, con i numeri naturali le cose vanno come ci si aspetta: la quantità positiva più piccola che esista è 1, e sommando n volte 1 si ottiene n , quindi in questo caso è proprio vero: basta sommarne a sufficienza e si ottiene un numero grande a piacere.

Ed in verità, anche con i razionali od i reali le cose stanno allo stesso modo: in breve, qualunque sia il numero h , è possibile aggiungerlo a se stesso un gran numero di volte, fino ad ottenere una somma grande a piacere.

Ma allora? Che cosa c'è di diverso nelle somme che si ottengono dal problema del capitale?

È molto semplice: gli addendi non sono costanti, ma cambiano via via che si sviluppa il calcolo, anzi, esaminando attentamente i risultati intermedi, scopriamo che gli addendi diventano sempre più piccoli.

E a pensarci bene, è facile costruire una somma fatta in questo modo, vale a dire che abbia le due seguenti caratteristiche:

1. tutti gli addendi sono positivi;
2. la somma di un numero arbitrariamente grande di tali addendi non supera una certa quantità S .

Infatti, basta pensare alla somma

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

che un matematico scriverebbe

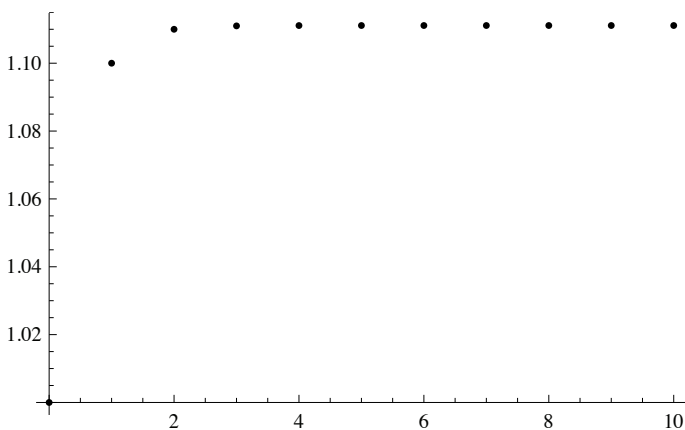
$$\sum_{k=0}^n 10^{-k}$$

Bene, se proviamo a calcolare (qui non serve il computer!) un po' di termini di questa somma, scopriremo che essa vale

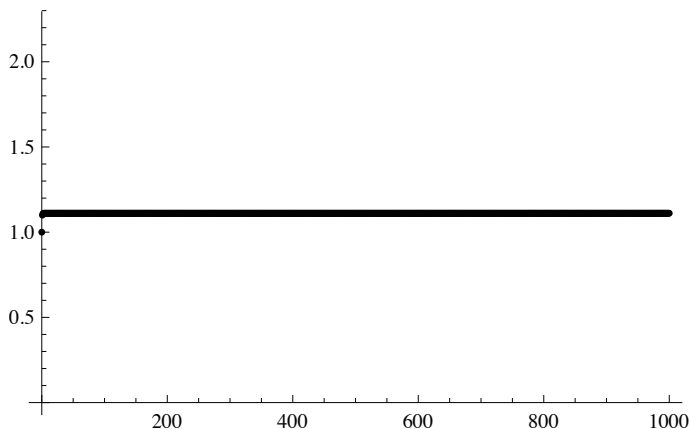
$$1.1111111 \dots$$

senza alcuna possibilità di raggiungere mai il valore 2 (ma neppure il valore 1.2, od 1.12 ecc.)

E se volessimo visualizzare il grafico? Eccolo qui:



Ma questi sono solo i primi 10 termini; che cosa succede se visualizziamo i primi 1000?



Ci siamo riusciti di nuovo: abbiamo scritto un'altra somma in cui un numero arbitrariamente grande di addendi non produce certamente un risultato grande a piacere, anzi, al contrario, la somma si mantiene comunque limitata. L'Analisi Matematica comincia praticamente da qui: il dubbio del piccolo studente di quarta elementare non era da poco, e l'errore commesso è giustificabile, come pure, in fin dei conti, l'imbarazzo della maestra.

Ma non possiamo fare a meno di chiederci: che cosa sarebbe successo se Andrea avesse incontrato una maestra così preparata da capire quante cose belle c'erano dietro quella domanda? Quante volte al giorno legittime perplessità di studenti volenterosi vengono sommariamente ignorate da insegnanti poco attenti (o poco preparati, verrebbe da pensare, ma preferiamo escluderlo)?

Ed ancora: che uso stiamo facendo delle straordinarie opportunità che le tecnologie informatiche ci mettono a disposizione per l'insegnamento della Matematica?

Probabilmente ad alcuni sembreranno questioni di secondaria importanza, ma ci permettiamo di dissentire: nella Scuola dei nostri giorni gli studenti hanno bisogno di mo-

tivazioni, e non esiste motivazione migliore della passione, della curiosità, della voglia di capire, meglio se insieme agli altri, in una prospettiva non egoistica, ma anzi condivisa, della cultura.

Alternative non ve ne sono: come si può, infatti, ritenere attuabile un modello di scuola basata sulla competizione tra studenti, vale a dire sulla costruzione di una scala di valori che finirebbe per costringere i nostri ragazzi ad una continua rincorsa l'uno contro l'altro, sperando di essere migliori del vicino di banco e dunque escludendo i valori della solidarietà, della condivisione, della crescita comune, ed in ultima analisi della convivenza costruttiva all'interno di una comunità? Un modello contrario alle nostre radici culturali e che contiene, oltretutto, una crudele burla: nella nostra società oligarchica e lobbystica, tale sistema risulterebbe in sostanza del tutto incapace di mantenere le proprie promesse. È inutile prendersi in giro: la scuola ormai da tempo ha cessato di essere mezzo di riscatto ed ascesa sociale: le posizioni lavorative migliori sono occupate a priori con criteri diversi da quello della capacità e del merito:

Meglio non generare ulteriori frustrazioni, meglio evitare di proporre un futuro che non c'è. Meglio anche smettere di interrogarsi sulla sconcertante assenza di valori nelle giovani generazioni: i giovani posseggono valori, e se le generazioni precedenti non li riconoscono è perché, in molti casi, non glieli hanno trasmessi loro!

Ma se la famiglia latita, ed in prospettiva non si intravedono motivi di ottimismo, la scuola può cambiare. La speranza è che lo faccia nella direzione giusta.

Un'antologia di brani matematici

La sorpresa del venerdì sera del 7 agosto, arrivando a Petropolis, fu quella di trovare una chiesa gotica¹.

«Ma come mai?» chiesi subito al mio amico chaperon Mario Cacciaglia.

«Mah», fu la sua laconica risposta.

E anche la risposta di Mario mi risultò sorprendente. Va chiarito a questo punto che Petropolis è una cittadina brasiliana a settanta chilometri da Rio de Janeiro, sulle alture che circondano, all'interno, la baia di Guanabara. E Mario, addetto presso l'Istituto di Cultura dell'Ambasciata italiana a Rio, è autore di numerose pubblicazioni umanistiche, ultima, in ordine di tempo, una storia del teatro brasiliano.

È chiaro allora, come mi sia apparso strano un gotico in un punto sperduto del Brasile, dove mi sarei aspettato tanto folklore, ed il laconico «mah» di un professionista della cultura! Ma era sera ed eravamo stanchi.

La settimana per me era stata dura. Ero in Brasile nella condizione di «pendolare della matematica» per esporre

¹F. Bongiorno, A. d'Augenti, *Dalla magia del numero alla codificazione normativa*, in «Atti e Memorie della Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti di Modena», Vol. I 1983-84

una ricerca svolta nell'ambito universitario, al Congresso internazionale di Analisi Funzionale, promosso, nella struttura dell'Università Federale di Rio de Janeiro, dal gruppo del professor Leopold Nachbin, che, se i matematici avessero una «classifica» mondiale, come quella dei piloti di formula uno o dei tennisti, sarebbe (a buon diritto) tra i primi cinque o sei.

Al mattino dopo Mario mi accompagnò in giro per la città, a piedi, e mi raccontò la storia di Petropolis. Mi piacque di sentirla, anche se mi ero erudito, la sera, sulla guida Nagel, dove avevo appreso che nel 1829, allorché l'imperatore, don Pedro I di Braganza, acquistò la Fazenda do Corrego per farvi una residenza di villeggiatura per la figlia Paula, il luogo era semplicemente una fresca altura di campagna. Ma si capisce che i nobili carioca vollero ben presto cominciare a frequentarla, per non perdere di vista i loro sovrani durante le calure estive (ed anche invernali...). Sorsero così le prime ville. Ma si passò ad una vera città con don Pedro II. Uomo di grande cultura, conoscitore dell'Europa (era in corrispondenza col Manzoni, che ammirava, al quale sottoponeva le sue amate fatiche letterarie e verso il quale lo scrittore pare fosse alquanto benevolo...), don Pedro II favorì l'insediamento sul luogo di una colonia di alcune migliaia di emigrati tedeschi, e non ebbe nulla in contrario che il loro capo, Julio Federigo Koeller (brasiliano d'origine tedesca) desse a Petropolis una impronta germanica.

La città è risultata bella; ha ville nello stile dell'ottocento europeo e chiesa gotica, naturalmente, ed anche «stuben» ove si può gustare il «churrasco» (il tipico arrosto alla brace brasiliano) con la senape.

Non è che la dottrina mattutina derivasse a Mario dall'aver letto la Nagel durante la notte. Chissà se la sera prima

aveva percepito la mia domanda (è troppo vissuto per fare attenzione a ciò che egli stesso dice, figurarsi se bada a ciò che gli si chiede!), o forse voleva, col suo «mah», aderire al mio stupore, per una sorta di complicità.

Eravamo alla periferia di Petropolis, in vista delle montagne di Teresopolis, ma io, pensando che dopo tutto a Mario non dovesse dispiacere troppo se mi ero distratto, ripensavo alla spiaggia di Leblon, che continua ad ovest Copacabana giustamente famosa, oltre Ipanema dal romantico nome.

Non è per dire che sono stato a Leblon, ma del fatto che lì una mia vecchia idea, quella di mettere insieme un'Antologia di brani Matematici, ha trovato un po' di fortuna. Gli aspetti socio-culturali che ne stanno alla base allora erano insospettati nei matematici e nella matematica, e anche l'idea che per questa via la matematica si possa proporre a un pubblico assai più vasto di quello che la frequenta per professione.

È Leblon la zona residenziale di Rio, e lì intorno il professor Nachbin ha la sua casa. Lì appunto, nella pausa dei lavori congressuali, una sera siamo stati suoi ospiti; così abbiamo avuto modo di godere del suo calore latino, col quale, tra l'altro, ci ha messo a disposizione i suoi amici. C'era anche Renè Thom, l'uomo delle Catastrofi, cioè l'inventore di quei modelli matematici in grado di descrivere gli eventi fratturativi.

L'opera di Renè Thom prosegue, se vogliamo andare lontano, quella di Newton che propose vari strumenti matematici (l'integrale, la derivata) per descrivere quei fenomeni esterni ad andamento continuo che allora non erano ancora stati codificati. Già all'epoca di questa storia la matematica di Newton aveva fatto il suo tempo. Essa è basata sul concetto di regolarità e pertanto è in grado di vestire solo realtà regolari; mentre il mondo, quello che ha interesse ai nostri giorni,

non è regolare né continuo. I processi biologici, come quando si nasce e si muore, ne sono esempi lampanti, come l'idea che nasce improvvisa, o la costruzione onirica che dilegua al risveglio, la folgore, i frangenti del mare.

Allora occorre uno strumento matematico che indagli su questi momenti di passaggio (appunto le catastrofi). René Thom l'ha proposto in un poderoso tomo, edito anche in italiano da Einaudi: *Stabilità strutturale e morfogenesi*. Esaminando la lista dei contenuti viene da chiedersi se si tratti dell'opera di un folle rivoluzionario o di un genio. Ma basta chiedere agli addetti ai lavori.

Come si vede la riunione, era l'occasione per una bella serata di cultura.

Si cominciò a parlare dell'opportunità di dare spazio a certe linee emergenti della matematica, e se farlo semmai eliminandone altre. Il discorso era spinoso, si capisce, perché la motivazione che spinge a non sostenere più un certo tipo di matematica in voga, può esser vista o propagandata, come un'operazione liberatoria e progressista: l'abolizione della matematica di regime a favore di matematiche nuove, di stampo democratico.

Pensavo all'opera di Lebesgue, rimasta pressoché sconosciuta nell'Italia degli anni trenta, quando si preferivano matematici germanici a quelli francesi, o alla citata Algebra Astratta, che negli anni sessanta è stata promossa dall'est.

I miei interlocutori brasiliani erano molto cauti: ci tenevano a chiarire che per loro il problema era unicamente didattico: dell'opportunità, cioè, del mezzo tecnico per favorire l'approfondimento delle conoscenze.

Personalmente attraverso la mia esperienza sul campo mi ero fatto l'idea che se si vuole veramente andare verso una matematica più vera, non si può *tout court* abolire quella di regime, per sostituirla con quella dell'Est, foss'anche

dell'Ovest.

Si deve avere invece la possibilità di confrontare varie tematiche e scegliere, in modo da conservare di ciascuna parte ciò che interessa e che conviene.

Per far ciò con responsabilità culturale bisogna documentarsi. Nel corso della conversazione, pur con gradualità, queste mie idee sono venute fuori: pendolare, ma proveniente da un paese democratico, ove si può parlare; e allora anche a Leblon, ove il clima è assai meno dialettico, posso dire ciò che penso, senza pretendere, nello stesso spirito della democrazia, di sentire punto per punto ciò che pensano gli interlocutori. Ero però confortato da certi sguardi e sorrisi, specialmente di alcuni giovani colleghi, emergenti sotto la veste professionale.

Arrivai alla mia proposta: il riesame delle fonti; un ritorno agli Autori, concedendosi pure una chiave di lettura di ripensamento e di critica, ma che sia il solito onesto umanistico discorso dell'aderenza alla realtà storica. In concreto, una Antologia di brani matematici.

Antologia, oltre che *flori del pensiero*, come dice la parola, vuol dire scelta dei brani, note a fondo pagina, commento, ove il lettore trovi la veste autentica in cui sono stati posti i problemi, ed anche il fervore che ha animato la ricerca, ed abbia infine la possibilità di recuperarne per intero il retroterra culturale.

L'idea trovò spazio intorno a sé. Ma la cosa più inaspettata fu la proposta di quegli amici, di fare l'Antologia insieme.

Mario Cacciaglia terminò il suo pezzo con l'immagine della patetica Isabela, ultima principessa del Brasile, cacciata nel 1889 col padre, don Pedro II, e la madre, una Borbone; sposa infelice di un certo duca d'Aquila, personaggio oscuro che tramò contro lo stesso imperatore.

Cacciato, lasciò il Brasile per mare in una notte tempestosa; di lui, che fu discreto pittore, nell'ex dimora imperiale, a Petropolis, rimane un dipinto, proprio di un naufragio.

10 agosto 1978, Rio de Janeiro

Il Matematico vestito del solo gesso

Dietro alle lavagne a parete delle grandi aule universitarie c'era di solito uno spazio attrezzato con un water un lavabo, un disimpegno con una piccola scrivania e un appendiabiti. Il docente qualche minuto prima della lezione scendeva dalla sua stanza o veniva direttamente da fuori e si infilava in questo spazio, dove poteva appoggiare il cappotto o la giacca, indossare il camice bianco, se aveva l'abitudine di farlo, rivedere i foglietti con gli appunti per la lezione o la relazione, soddisfare eventuali necessità dell'ultim'ora.

Quel pomeriggio era fissato un incontro con un matematico indiano allora in voga, del quale la frase più celebre era «Che paese splendido il vostro. Da quando sono qui, io mi lavo solo con l'acqua di mare.» «Eh se sente ...», era naturalmente la risposta usuale, pensata ma non detta, in rispetto al carisma dell'uomo.

Mezz'ora prima dell'ora era venuto giù un catafascio di pioggia a vento, e in quel frangente era entrato, in quello sgabuzzino di disimpegno, l'oratore avvolto in un impermeabile di tela cerata zuppo e grondante.

«Oggi gli è toccata l'acqua del cielo!» si sentì dire in sala tra le molte risatine sgangherate.

A un certo punto si aprì la porticina intagliata in parte sulla lavagna e Bahanachrisnan si manifestò in aula con un cannello di gesso intonso in una mano e un cancellino di feltro nell'altra e più nulla. Per il resto non c'era traccia visibile di abbigliamento. La cattedra gli copriva la fascia che andava da sotto l'ombelico a sotto la giuntura delle gambe, e per il resto, a parte i suoi occhietti da miope con la montatura nera, appariva chiaramente e completamente nudo.

Sorrise furbescamente dietro le lenti, scorse dietro la cattedra fino al punto in cui cominciava la lavagna...

Si sentì come un rumore di fiato sospeso – ma perché il fiato sospeso fa rumore? – che rientrò subito perché la cattedra non scoprì quella parte del corpo su cui tutti, evidentemente, avevano puntato l'attenzione.

Principiò a parlare con voce spedita, scrivendo formula e simboli, avanzando verso l'estremità opposta della lavagna. Altra ondata, sembrò, di fiato trattenuto, ma non successe nulla. La cattedra non tradì nemmeno ora l'intimità dell'oratore.

Si girò verso la sala, sorrise amabilmente, lanciò il gesso verso l'alto e fece una piroetta su stesso aspettando che il gesso gli tornasse sulla mano aperta e veleggiò la parte iniziale della lavagna dove riprese il discorso e la scrittura di formule e parole. Altro percorso verso destra, altro lancio del cannello verso l'alto, altra piroetta e zac acciuffò il gesso stringendo la palma allargata in attesa e a capo verso sinistra, senza aver mostrato nulla di sé che già non era stato visto.

«Ahò! Ma questo è venuto nudo...»

«Questo è matto...»

«No. Poveraccio. Sotto l'acqua s'è frascicato tutto fino ai ...», e specificò; «se vai dentro la lavagna», aggiunse,

«so' sicuro che ce trovi 'na funicella co' tutte le cose sue a 'sciugà...»

«Si ma diamo tempo. Daje e daje il gesso gli dovrà cadere, o no? E allora per raccogliarlo sarà giocoforza uscire allo scoperto...»

Ma i giri passavano, le piroette si ripetevano e il gesso non cadeva.

«Secondo me ce l'ha legato alla mano con un filo invisibile», disse qualcuno.

«Ma no. Non hai visto come lo lancia in alto?»

«È vero...»

L'esposizione volgeva al termine. Aveva fatto su e giù più di dieci volte ed era passata più di un'ora.

Infatti di lì a poco Bahanachrisnan si fermò al centro della cattedra, lanciò il gesso ancora una volta e lo riprese, ora, dopo due piroette complete.

«Ho finito», disse poi semplicemente.

Il pubblico applaudiva.

Lui andò nel punto in cui la cattedra finiva, passò davanti e si riportò al centro per rispondere con un inchino ai battimani.

Ora era tutto scoperto e ci fu un sonoro segno di stupore. Non era nudo, come si era potuto pensare, ma aveva un esilissimo slip di tessuto lucido leopardato.

«Voi sapete senz'altro», disse sorridendo amabilmente, «come io ami lavarmi solo in acqua di mare. Questo», e indicò il costume, «lo uso quando mi immergo nei mari del mio paese: mi torna utile per tenere a bada gli squali...»

Esplose un applauso fragoroso, proprio de core, come diciamo a Roma.

«Ci ha conquistato tutti...» concluse Fulvio, raccontando l'episodio ad Andrea.

«Basta poco, dopotutto», aggiunse.

«Eh! Non direi proprio poco. . . » volle concedere Andrea.

«Ma sai, per me è stato poco. Il mio modello di conferenziere è Sheherazade. . . »

«Ah certo, allora. . . Capisco.»

Quella sera, passeggiando con i colleghi per il lungomare di Rio de Janeiro, la città che ospitava il congresso, Fulvio rifletteva a voce alta sul curioso personaggio.

«Certo, bravo è bravo, il giocattolo che si è inventato sembra notevole. . . Qui siamo al mare: il costume passi. . . Ce lo vedresti in montagna?»

«Con la mise leopardata? Sì. A impazzire con un violino tra gli alberi. . . », giunse pronta la risposta. «Ma il punto è un altro. Siamo onesti, da un certo momento in poi eravamo tutti occupati a scommettere sulla caduta del gesso, sugli indumenti (a proposito. . . indicò qualcosa di abbronzato che pedalava), insomma, ho come l'impressione che abbia parlato un po' da solo.»

«Ecco, bravo, proprio come capita certe volte a noi.»

«Parli da solo, Fulvio? Ti succede spesso?» interruppe ridacchiando Sergio.

«Qualche volta mi è capitato, sì. Non così spesso, ma sì.» rispose Fulvio. «Ma mica solo a me. . . Hai presente quella sensazione che provi mentre sei lì alla lavagna, preso dalla dimostrazione che ti sei preparato con tanta cura, fin nei minimi dettagli, e poi ti accorgi improvvisamente che non ci sono più? Gli studenti, voglio dire. Puff! Svaniti! Ti senti un po' come una locomotiva senza vagoni: puoi pure procedere spedito, ma il treno, lì dietro, non c'è più.»

«Capita», concesse Sergio. «Anzi, recentemente capita sempre più spesso, ringraziando il crollo della Suola Superiore: i Licei ci regalano gente completamente incapace di intendere e di volere.»

Colpa mia, pensò Fulvio. Ma con chi ne vado a parlare? Con Sergio il terrore degli studenti? Vabbè come non detto.

Annui gravemente simulando consenso, ma rinunciò a proseguire: già conosceva lo svolgimento della successiva discussione; si sarebbe finiti a parlare di selezione, meritocrazia, sacrifici, sudore della fronte, scuola di vita, e «Io ai miei tempi.»

Così preferì andare avanti da solo: i suoni degli autobus sgangherati si mescolavano con i commenti dei colleghi sulle bellezze naturali del luogo e facevano da contorno alle sue riflessioni sulla didattica della Matematica.

Pensò allora ad una lezione di qualche tempo prima: Università dell'Aquila, facoltà di Ingegneria. Esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy. Bello, e splendida dimostrazione: un'applicazione del teorema di Banach-Caccioppoli sulle contrazioni.

Elegante, lineare, rigorosa. L'argomentazione era contenuta in una quindicina di pagine scritte al computer, stampate su carta porosa e vagamente giallognola con una stampante ad aghi che aveva un'idea del tutto sua dell'allineamento delle formule matematiche, con una particolare avversione per le frazioni; d'altra parte si era negli anni ottanta, molti libri avevano ancora le formule scritte a mano.

Fulvio aveva distribuito le dispense e poi si era diretto alla lavagna per iniziare l'esposizione. La lezione era filata liscia e serena per un'ora e mezza, fin verso le diciotto.

Più tardi, al bar, davanti ad una tazza di cioccolato fumante, assolutamente indispensabile per affrontare la temperatura rigida, chiese improvvisamente ad Andrea: «Ma secondo te hanno capito?»

«Sì, credo di sì»

«Se penso alle domande che hanno fatto alla fine, non mi sembra»

«Fulvio, sai cos'è? Tu questa lezione l'hai costruita, e conosci queste cose da vent'anni e più. Io ho avuto la possibilità di parlarne con te tante volte, e poi so già quante belle cose si fanno con le equazioni differenziali, e perché sono importanti le soluzioni di un problema di Cauchy. Eppoi mi piace la Matematica, mi piace anche la dimostrazione in sé. Insomma, sì, quando dico che è elegante mica lo faccio per prenderti per il culo: ci credo sul serio. Magari a loro non interessa poi così tanto, no? Oppure non hanno avuto ancora l'opportunità di accorgersene.»

«Cioè tu vuoi dire che è un po' come una sinfonia: la prima volta che la ascolti puoi dire bella o brutta, mi piace o non mi piace, ma poi, col tempo, ti accorgi di tante sfumature che ti erano sfuggite, ed impari ad apprezzarla.»

«Beh sì, per non parlare del fatto che un appassionato come me, per quanto attento e paziente, non arriverà mai a capirci nemmeno un decimo di uno che fa musica di professione: ma ti immagini un Abbado come può vivere la musica mentre la dirige?»

«Insomma, dici che continuando così finiremo per far lezione in smoking e con la bacchetta in mano...»

«Beh, sarei curioso, non che ti manchi la faccia... Però il tempo serve: la distanza tra la tua comprensione della materia e quella di uno studente è talmente ampia da rischiare di diventare incolmabile: più la lezione diventa formalmente perfetta, più questa distanza si accentua. Però come si fa a raccontare la Matematica senza trascurare la forma?»

«Bella domanda Andrea, vale la pena lavorarci sopra»

Da L'Aquila a Rio, dal freddo dell'inverno abruzzese al caldo dell'estate australe.

Gli studenti dell'Aquila avevano visto in lui un matematico bravo, semplicemente. Forse in molti di loro era nato il sospetto che il prof fosse così allenato, che in fin dei conti

era meglio che la matematica continuasse a saperla lui. Che tanto se un giorno avessero avuto necessità, potevano sempre fargli una telefonata. E allora era sufficiente impararsi a memoria le dimostrazioni, farsi un centinaio di esercizi tanto per garantirsi il superamento dell'esame, e buonanotte.

Un po' come l'acrobatico ed impronunciabile collega indiano: bravo e competente, addirittura geniale, ma distante.

La domanda restava: come raccontare la Matematica senza creare quella distanza incolmabile?

«Il taxi Fulvio, il taxi!»

Era la voce di Sergio

«Ma quale taxi? Stiamo dall'altra parte della strada, basta attraversare!..»

«Ma sei matto? Attraversare a Rio? Vuoi farti investire? Qui per attraversare si prende il taxi, non lo sapevi?»

Fulvio si infilò nell'improbabile veicolo, che doveva aver conosciuto giorni migliori, in un'esistenza precedente. Il conducente non aveva un aspetto rassicurante; *deve essere uno di quelli che investono i pedoni* pensò.

Un professore a sorpresa

All'intervallo i ragazzi del terzo scientifico parlottavano nei pressi del bar.

«Oggi viene matematica...»

«Ma a noi ci toccherà la donna o quello nuovo?»

«Quello nuovo, me sa. Così ho sentito dire...»

«Dicono che è preparato. Speriamo che sia vero...»

«E menomale! Ma che stai a di' Se è preparato, è peggio per noi. Ce fa studia' de più, no?»

«E sì. 'n somma: e come no!»

«Ah. Vedi che me dai ragione...»

«Sì, ma tanto je faremo véde li sorci verdi...»

«Sì. Ariconsolati co' l'ajetto, come se dice a Roma. Tanto quello è er prof e il coltello dalla parte del manico ce l'ha comunque lui...»

Intanto la campanella suonò e salirono al terzo piano, dov'era la loro classe.

Trovarono una persona seduta in cattedra, che vedendoli sciamare all'interno in modo turbolento e rumoroso non dette il minimo segno di disagio.

Aspettò un minuto che si sedessero e che il rumore si abbassasse un po' e poi aprì il registro.

«Ma che questo ce interroga subito?» si sentì dal fondo.

«No. Non v'interrogo subito. Cioè non nel senso che intendete voi, forse. Pensavo che vi chiamo, uno per uno, per vedervi in faccia, e poi ci facciamo una chiacchierata. Una cosa bilaterale. Io vi vedo, voi mi vedete. Voi sapete come mi chiamo, io non so come si chiama ognuno di voi, e così faccio l'appello.»

Si alzò una mano dal primo banco.

«Prego», disse il professore.

«Scusi. Sa, noi sappiamo che lei è il professore nuovo di matematica e fisica. Ma come si chiama non ce l'hanno detto...»

«Ah no? Ok. Ve lo dico io...» e lo fece senz'altro.

Rapidamente fece l'appello.

«Non vi state ad alzare in piedi. Quando dico il vostro nome fatemi un cenno con la mano. Oggi è per darmi un'idea. Non mi posso mica imparare i nomi di ognuno la prima volta che vi conosco...»

La verità era che non voleva dare la sensazione che li volesse squadrare da capo a piedi. Questo non era il suo obiettivo. Nei primi minuti della prima lezione pensava che fosse naturale dare importanza alle persone, più che al programma o alle materie. Lo disse.

«Sapete, la prima cosa importante è che ci conosciamo. Specialmente all'università ho conosciuto professori che alla prima lezione entravano e senza dire né hi né bye, si giravano verso la lavagne e cominciavano a scrivere, blaterando cose come sia assegnato il campo vettoriale V definito sul compatto? ... Capite. A quel punto poteva pure smettere. Perché chi ci poteva capire qualche cosa?»

Li guardava. Ogni brusio era crollato e loro pure lo guardavano, quasi non credendo a quello che a loro stava capitando di vedere.

«Ho capito», continuò il professore, «la paura di entrare in aula, con un centinaio di persone che ti squadrano e se ti sfugge una cosa sbagliata sono pronti a darti addosso senza pietà. Ma insomma uno si deve controllare. Si deve tenere. Per un proprio senso di dignità».

«Vabbene», disse alla fine dell'appello. «Siete carini. Ora proviamo a entrare nel merito.»

Come si aspettava si rinnovò un rumore di fondo.

«Noi dobbiamo fare insieme matematica e fisica ...»

Li guardò.

«Come state messi?» chiese.

Silenzio gelato.

«A quattro di bastoni?» domandò.

Qualcuno che capì, o conosceva il modo di dire ridacchiò.

«Insomma pensate di essere messi piuttosto male...»

«Eh sì professore. Così ci diceva sempre la nostra professoressa...»

«E non faceva niente per aiutarvi un po'?»

«Sì! Ci dava tre e quattro e ci strillava pure perché non sapevamo niente...»

«Riguardo a che?» chiese con sibilo serpentino.

Abboccarono.

«Le espressioni letterali»

«I radicali»

«La scomposizione in fattori...»

«E la geometria euclidea?» chiese ancora lui.

«Qual è quella dei criteri d'uguaglianza?»

«Eh! Quella.»

«Ah. Quella proprio gnente, professore.»

«Non l'avete fatta, vuoi dire?»

«No. Non ci abbiamo capito niente...»

«Ah. Va bene. Bravi. Mi raccomando, non dimenticate quello che mi avete detto. Si tratta di quello che sapete.

Male, ma ne avete in qualche modo conoscenza. E non date retta a quell'orribile frase che alcuni colleghi continuano a ripetere riprendendo una materia a un livello più avanzato. E cioè: *Ora ricominciamo tutto da capo. Dimenticate tutto quello che avete fatto finora.*»

Primo, perché non si può proprio fare. Magari si potesse. Non esisterebbe più il dolore.

Secondo, perché sarebbe come se prima di andare in banca a prendere dei soldi, buttassimo via tutti quelli che abbiamo in tasca.»

«Mi raccomando», continuò guardandoli bene in viso. «Ogni cosa che sapete, anche male, è preziosa e va recuperata. Lo faremo insieme.»

I ragazzi lo guardavano. I vetri si appannavano. Ma era solo l'autunno. O potevano essere i numerosi sospiri di sollievo che avevano levato?

«Un'altra cosa vi voglio dire. Questo della scuola è un tempo che avete per voi, per coltivare le vostre attese, per individuare le vostre aspirazioni e darvi lo strumento per realizzarle. Non mandatelo perso, perché non ci sarà, nella vita, un'occasione supplementare.»

«Il programma, qual è professore?» chiese qualcuno con interesse, sembrò.

«Il programma è quello che riusciremo a fare...»

«E se non si fa in tempo?»

«Allora non mi sono spiegato. Quando la vostra capacità di assorbire è stata saturata, ci fermiamo.»

«Sarà. E chi glielo dice al preside?»

«Non c'è bisogno di dire nulla. Io glielo scrivo»:

«E gli scrive che la nostra capacità di assorbire»

«Ma no. Naturalmente. Scriverò che all'inizio gli allievi della classe avevano preparazioni eterogenee ed è per questa ragione stato impiegato del tempo per uniformarle. Que-

sto influenzerà probabilmente lo svolgimento del programma in questo primo anno, ma poi potrà essere compensato nei prossimi, sicuramente.»

«Sicuramente?»

«Sì. Sicuramente. Perché la matematica e la fisica io le conosco bene e se non mi metterete troppi bastoni tra le ruote riuscirò senza sforzo a farvele capire...»

«Ma allora questi libri...» e misero in mostra sui banchi i libri di algebra, geometria e fisica che avevano acquistato.

«Quei libri? Benissimo. Non mi sembrano nemmeno troppo alti.»

«E quali sono quelli che vanno meglio?»

«Quelli bassi, perché c'è meno da studiare...» osò qualcuno.

«No. Quelli alti, perché le cose sono spiegate meglio...» proposero altri.

«Il fatto che si debba studiare il meno possibile è basilare», fu categorico il professore. «A patto che quello che si studia si capisca, Cioè non basta imparare quello che studia. Ma va capito, cioè messo in relazione con tutto il resto che già si sa. Una libreria, capito? La vostra mente è come un insieme di scaffali comunicanti. E ogni cosa nuova va accostata alle altre con cui può avere affinità. Anche in prospettiva».

«Anche in prospettiva? E che vuol dire professore?»

«Che bisogna anche avere fiuto, ragazzi».

«Fiuto? Sarebbe?»

«Non lo so. Questo non lo insegno.»

«E lei ce l'ha?»

«Sì. Finora ne ho avuto abbastanza.» Fece una breve pausa, poi continuò.

«I libri grossi sono pericolosi. Perché spesso il maggior numero di pagine non è utilizzato per dare le spiegazioni con

maggior accuratezza. Ma vengono usate per dire quello che si può fare e anche quello che non si può fare. E questa giunta non serve. Perché i fondamenti di una materia sono costituiti da quello che si può fare con essa. E allora, per chi ha la testa, quello che non si può fare risulta implicito, una conseguenza».

«E se uno non ha la testa?»

«Eh no, ragazzi. Se uno non ha la testa non deve studiare.»

Suonò la campanella. Era venuta come in anticipo, dette la sensazione.

«Mi raccomando», disse il professore, uscendo. «La prossima volta vi chiedo cosa vi è rimasto della chiacchierata di oggi ...»

Una sconvolgente sorpresa, poteva essere una risposta adatta.

Primo giorno di scuola

Andrea non ci aveva fatto caso. Però quella mattina, diversamente dal solito, si era alzato presto, molto presto, con una sensazione nuova, mai sperimentata prima. Si era preparato in fretta, più in fretta del solito; scendendo le scale aveva scoperto di avere dimenticato la valigetta, come al solito. Era risalito a prenderla ed era finalmente uscito di casa.

Il suo primo giorno di scuola: 9 settembre 1993. Solo che non c'era una maestra premurosa e sorridente ad aspettarlo in un'aula accogliente e colorata. No, ad attenderlo c'era una classe intera: la prima scientifico A.

Entrando nel grande edificio, rifletteva: *il mio primo giorno di scuola*, dopotutto anche i prof ne hanno uno . . . Decise di guardarsi intorno e fotografare ogni particolare, ogni scorcio di luce di quella calda e luminosa mattinata di fine estate. Voleva ricordare tutto, aveva la precisa sensazione che di lì a venti o trent'anni sarebbe stato piacevole rivivere quei momenti. Un collega, ormai vicino alla pensione, lo salutò con affetto: «Buon anno professore!»

Fino a tre mesi prima erano state solo supplenze, ma da quest'anno avrebbe avuto le sue classi, la responsabilità di un gruppo da far crescere, un programma da portare a termine. Beh, un'altra cosa. . .

Professore, pensò; si soffermò a stringere la mano del

collega che lo aveva accolto. Colse un velo di malinconia nei suoi occhi. Capì che, dietro a quello sguardo, erano trascorsi in un attimo quarant'anni, intere generazioni di studenti.

Finalmente entrò in sala professori, provò due o tre armadietti con la chiave che aveva avuto in dotazione. Alla fine trovò il suo. All'interno c'era il registro. Una strana sensazione maneggiarlo da prof. Se lo mise sotto il braccio, come aveva visto fare tante volte. Riprese in mano la valigetta; si diresse verso la Prima A.

Lungo il corridoio, un altro collega lo salutò: «Primo giorno eh? Vedrai adesso che hai *quello* come ti rispetteranno ...»

Quello era il registro che teneva sotto il braccio sinistro.

Dopo un rapido saluto Andrea si fermò in mezzo alla folla di studenti. Guardò il registro. Poi le aule allineate lungo il corridoio. Scosse la testa; tornò verso la sala professori, depose il registro nell'armadietto.

Dopo l'appello, parlò per la prima volta alla Prima A del 1993.

«Avete di fronte uno strano tipo di professore. Tanto per cominciare, è un professore senza registro, e così resterà per le prime due settimane: questo significa che dovrete imparare a sopportarmi e rispettarmi senza la minaccia del votaccio. Difficile, mi rendo conto, ma sembrate svegli, quindi credo di potervelo chiedere. Poi, inevitabilmente, arriveranno i voti, ma io spero proprio che quel giorno avremo cominciato a conoscerci, a stimarci a vicenda, a capirci. E comunque, ricordate sempre che il voto che scriverò su quel registro sarà per ciò che realizzerete, per un compito, un'esposizione, una ricerca. Non sarà mai un voto a ciò che siete, perché quello, né io né chiunque altro è in grado di giudicarlo».

«Il voto a voi stessi potrete darlo solo voi, e vi prego di essere indulgenti: apprezzate ogni piccolo progresso, pre-

miatemi per ogni sforzo, siate felici per ogni piccolo passo che saprete fare, anche di quelli di cui io non mi accorgerrò. Imparate a volervi bene, a stimarvi così tanto da poter pretendere molto da voi stessi, a non sentirvi stupidi per un insuccesso, o solo perché qualcun altro vi dirà che lo siete.»

L'argomento della prima lezione lo aveva già deciso da giorni: le espressioni algebriche con le quattro operazioni. Avrebbe parlato per qualche minuto delle operazioni, dell'ordine di svolgimento, delle parentesi, poi sarebbe andato alla lavagna ed avrebbe mostrato con un esempio quanto la cosa in realtà fosse semplice. Poi qualche risposta a domande dei ragazzi ed infine il tempo per assegnare i compiti.

In pochi minuti le sue certezze si sgretolarono.

E allora cominciò a parlare di quanto gli piacesse la Matematica, ma anche giocare a calcio, o ascoltare musica.

Raccontò anche del suo intimo odio per le espressioni algebriche, triste, sterile esercizio privo di concetti, di fantasia, di eleganza.

Un odio coltivato fin dalle scuole medie, e che, ne era sicuro, lo accomunava almeno con i due terzi della classe.

Rispose immediatamente un successo insperato. Non applausi, forse, ma cenni di approvazione sì, diffusi e convinti.

Su due piedi decise di accantonare la programmata noiosissima lezione, e di sostituirla con un qualcosa di diverso.

«Sentite, voglio essere onesto, quindi vi dirò subito che, prima o poi, le espressioni bisognerà riprenderle: saper fare i conti, disgraziatamente, è una necessità della quale non possiamo liberarci.»

La delusione tra i banchi era palpabile.

«Però, ho un'idea: che cosa sono le espressioni: l'applicazione di operazioni, per la precisione quattro operazioni, più la radice, della quale però ci occuperemo l'anno prossimo. Quindi per adesso solo più per meno e diviso. Ok?»

Ok.

«E ovviamente le frazioni.»

Ovviamente.

«Benissimo, allora ecco la mia idea. Quando arrivai al primo anno di Matematica e studiai finalmente Algebra, ci fu un momento in cui improvvisamente mi si illuminò la scena, come un giorno di sole dopo una notte di tuoni e lampi.»

Perplessità dall'auditorio.

«Ok, metafora eccessiva.»

Si riprese dall'incidente e continuò con un sorriso.

«Conoscete le varie proprietà? Commutativa, distributiva, associativa ...»

Qualcuno confessò che sì, insomma, almeno per nome le aveva incontrate. Poi l'avventuroso tentativo di associare un contenuto ai suoni naufragò rapidamente.

«Non vi preoccupate: anch'io in realtà ci avevo capito poco, poi arrivò l'Algebra, quella vera, e mi illuminò. Allora ho pensato di fare così: sapete che cos'è un insieme?»

Alcuni sì, molti altri no.

Andrea non si perse d'animo: in venti minuti illustrò la nozione di elemento, quella di insieme, poi si avventurò a raccontare che cosa è un'operazione binaria.

«Vedete? Definiamo questo insieme: contiene la stellina, la paperella, il fiorellino e la pallina da tennis.»

«Ed ora guardate qui: ho costruito una tabellina di sedici caselle: una per ogni coppia di elementi. Ad esempio, ecco la casella relativa alla coppia (stellina, pallina) – indicò col dito – vedete? Il risultato è la paperella. Ed ecco la casella relativa a (stellina, fiorellino) – ancora il dito ad indicare il punto esatto alla lavagna: conteneva una stellina.»

«Scusi professore, quella sarebbe una paperella?»

«In prima approssimazione, sì.»

«E adesso, vi sembra strano se vi dico che per definire un'operazione tra elementi di questo insieme, è stato sufficiente indicare un risultato in ognuna di queste sedici caselline? Assegniamo un simbolo a questa operazione, ad esempio il quadratino. Allora, per dire che

$$\text{ball} \cdot \text{square} = \text{star}$$

non farò altro che disegnare una pallina nella casella all'incrocio tra pallina e stellina. Così, ok?»

Una mano alzata in mezzo all'aula.

«Scusi prof., ma questa è proprio *Algebra*?»

Si sentiva la A maiuscola nella voce del piccolo curioso.

«Sì, giuro. Però non sembra, vero?»

«No»

«Meglio, significa che non ti stai annoiando. Buon segno»

«Adesso vi faccio una domanda. Se osservando la tabella dovessi scoprire che, ogni volta che nell'operazione è coinvolto un certo simbolo, che so, il fiorellino, allora come risultato viene l'altro simbolo, insomma, se dovessi scoprire che l'operazione

$$X \blacksquare \text{fiorellino} = \text{fiorellino} \blacksquare X = X$$

qualunque sia X , allora pensereste che l'elemento fiorellino merita un'attenzione e forse anche un nome particolare?»

La classe rispose che sì, il fenomeno poteva pure sembrare degno di nota, ma che il tutto era un tantino astratto.

«Infatti è Algebra Astratta, ma fra pochi secondi diventa molto concreta. Allora, l'elemento fiorellino, dal momento che lascia inalterato qualunque altro elemento coinvolto con lui nell'operazione quadratino, si chiamerà *elemento neutro* per l'operazione quadratino. Accettabile?»

Risposta positiva. Senza molto entusiasmo.

«Bene, e adesso vi chiedo di recuperare le vostre nozioni di prima o forse seconda elementare. Non avete per caso incontrato operazioni che si comportano così? Cioè che hanno l'elemento neutro?»

Stavolta calò proprio la nebbia.

Ad Andrea la risposta sembrava ovvia, ma questo, pensò dentro di sé, era del tutto naturale. Infatti si trovava lì per insegnare.

Quel silenzio, paradossalmente, fu la prima lezione che Andrea imparò nella classe prima A: il fatto che sembri ovvio a te, caro prof, non conta nulla. Il tuo compito è farlo sembrare così ovvio – possibilmente anche interessante – anche a noi. Buon lavoro.

La prima A non lo aveva detto proprio così, ma il messaggio arrivò ugualmente forte e chiaro.

«Quanto fa due più zero?»

«Due prof»

«E zero più tre?»

«Tre»

«E mille più zero? Fermatevi altrimenti vado avanti . . .»

Qualcuno, probabilmente mosso a compassione, disse improvvisamente: «Ma certo, lo zero! È lo zero l'elemento neutro della somma!»

«Bravo, ok. Lo zero. Ma adesso faccio un'altra domanda: e per la moltiplicazione? Qual è l'elemento neutro della moltiplicazione?»

Giunse una risposta in tempo da record: «È uno!»

«Perfetto! Proprio così! L'elemento neutro della moltiplicazione è l'uno: esso, moltiplicato a sinistra o a destra per qualunque altro numero, lo lascia invariato. Facile, no?»

«Adesso sì prof! Prima un po' meno!»

«E se vi dicessi che ragionando sulla tabellina vi posso raccontare tutte le proprietà delle operazioni, e anche qualcosa in più?»

«Beh, magari prof, così si capisce»

«Allora affare fatto: faremo Algebra Astratta. Sempre meglio che le espressioni, no? Però promettetemi che quando

dovremo fare esercizi sui calcoli non protesterete troppo, e vi fiderete di me»

La lezione scivolò via così, leggera e serena. Parlarono anche della proprietà commutativa, e Andrea insegnò un trucchetto pratico per riconoscere le operazioni commutative guardando la tabella.

Camminando per il corridoio, era netta la sensazione di aver passato il primo giorno di scuola ad imparare più che insegnando.

Uscendo da scuola, Andrea ripensò ad una canzone che aveva amato qualche anno prima. Era di Luca Carboni, e ad un certo punto diceva: «I professori non chiedevano mai se eravamo felici»

Già, e che vuol dire essere felici? Quante cose accadono in quei cinque anni del liceo, quante ne erano successe a lui?

Ripresa la macchina, si tuffò nel traffico di Roma.

Senza una regola, alla rinfusa, lasciò che i ricordi riaffiorassero liberamente. Tentò di rivivere ogni momento, provare quelle sensazioni.

Il primo amore, certo, ed il primo pianto a causa di chi quell'amore non lo volle. E le ore passate ad ascoltare musica, o a leggere libri di fantascienza. Le prime domande, spesso senza risposta.

La libertà, la ribellione, la giustizia, gli adulti che non capiscono.

Giugno 1982, alla fine del terzo scientifico: suo padre che voleva festeggiare i suoi bei voti: «Ti faccio una foto vicino ai quadri, in modo che si vedano bene!» E lui che continuava a dire no, che non gliene fregava niente dei bei voti, che voleva soltanto capire la matematica, e la fisica, e che Shakespeare gli piaceva sul serio, per passione, non per il nove in Inglese o altre menate. E poi per mostrarli a chi? Niente da fare: suo padre non era tipo da accettare un 'no': fu una specie di

dramma familiare, un triste tutti contro tutti che durò giorni interi.

Una mattina di novembre: nonno era andato via. La scacchiera rimasta immobile in soggiorno, una partita mai finita, giorni a chiedersi come avrebbe dovuto continuare, e perché andando via si devono lasciare tante cose in sospeso, e tante altre se ne portano con sé, dando in cambio a chi resta soltanto nostalgia. Era una brava persona nonno, ma lui lo era sul serio, non come tutti gli altri che lo diventano solo dopo essersene andati.

Il passato, fino ad allora, non c'era stato.

Ed esattamente per lo stesso motivo, non c'era stato neppure il futuro.

Ed i primi rimpianti.

No, non era facile diventare grandi.

Ma anche la prima lacrima ascoltando Mahler, e quella sensazione di prendere fiato e non riuscire a fermarsi quando arrivava il crescendo; e quel sentimento nuovo, diverso, l'adagio, che sembrava parlare ad una parte di sé mai conosciuta prima.

Ma il primo bacio!

E com'era bella all'improvviso Roma, la primavera, l'odore dei fiori, una corsa sulla spiaggia come nelle canzoni.

Era a Villa Borghese, la discesa dove si andava a pattinare, il caldo di fine estate prima che ricominciasse la scuola, il ponentino delle sei, la granita di limone.

I volti dei suoi nuovi alunni, il primo giorno di scuola.

Si disse che sarebbe stato bello passare cinque anni insieme, vederli crescere, diventare uomini e donne.

Fu contento di essere arrivato in tempo alla terrazza del Pincio per vedere il Sole andar giù dietro alla cupola di San Pietro. Pensò che esistono pochi posti più belli al mon-

do. Pensò anche ad un primo bacio dato tanti anni prima, proprio lì, su quel muretto. Si chiamava Alessia.

I professori non chiedevano mai se eravamo felici.

Ma questo professore senza il registro sì! Lo vorrà sapere, sempre.

Una lezione in borgata

Rocco non si era ancora seduto quando il professore aveva raggiunto la cattedra¹.

«Comodi, prego. . . » disse come al solito con ironia, concedendo queste parole alla forma delle buone maniere, e continuò.

«Non ti siedi Rocco? Oggi hai le gambe anchilosate?»

«Anchilosate non so che vuol dire. Invece io sarei stato incaricato dai compagni di chiederle una cosa.»

«Sentiamo. . . »

«Ora che ci penso, non sono sicuro che sia il caso.»

«Non ti metterai mica in soggezione per me?» provocò Eliano, conoscendo il ragazzino.

Gli altri, età media 10–12 anni, giravano gli occhi intorno. Non riuscivano a capire se il loro delegato li stesse abbandonando o se invece prendesse solo fiato, fermo nel proposito di onorare la consegna, e temevano però che l'enunciazione della richiesta scatenasse un putiferio.

Rocco aveva 15 anni e non era né il più anziano né il più alto della classe, ma i compagni lo rispettavano perché era figlio d'arte. Suo padre, lo sapevano tutti, faceva parte della microcriminalità del quartiere e girava armato. Così anche

¹ Cfr. *Via dei Colombi* in F. Bongiorno, *Naufragi* Aracne editrice, Roma 2007, pag. 49.

lui, ogni tanto, si presentava in classe con un paio di coltelli a serramanico.

«E perché hai questi coltelli così grandi?» qualcuno gli chiedeva ogni tanto.

«È per proteggerti meglio, come dice il lupo di Biancaneve.», rispondeva con l'aria furba.

Giustamente Rocco era ignorante: conosceva poco le fonti, e sbagliava le citazioni.

E comunque ora era rimasto in piedi, e non pensava minimamente di abbandonare.

«No, non è questione di soggezione», riprese. «Il fatto è che lei non ha tempo da perdere. Mentre noi vorremmo ...» disse.

Eliano nemmeno si scomponeva.

«Ho tempo, non ti preoccupare. Cos'è esattamente che vorreste?»

«Che lei», si dovette schiarire la voce. «Ehm, ci parlasse delle puttane.»

La classe si gelò. La quiete prima della tempesta. Ma non venne giù neanche una goccia.

«Trovo ragionevole la richiesta. Del resto, se è una cosa che non conoscete, è giusto che se ne parli a scuola. Avete qualche domanda precisa?

«No professo', ce ne parli lei ...»

Invece la forza della curiosità fu irrefrenabile.

«Ma è vero che si tirano giù le mutande e fanno con tutti?»

«E lo fanno per i soldi?»

«È vero che le puttane sono le prostitute?»

«E anche le mignotte?»

«Ma ci sono anche i puttani maschi?»

«Ma quanti soldi vogliono?»

«È vero che li vogliono prima?»

«Ma come fanno a non fare un sacco di bambini?»

«Ma ci scopano proprio con chi glielo chiede?»

«E dove lo fanno?»

«Ma è vero che lo fanno presto presto?» «E loro si divertono?»

«È pericoloso andarci?»

«Ma che, ti possono rubare i soldi?»

«O perché ci hanno un sacco di malattie?»

«Ma chi le protegge?»

«Er padre de Rocco...» disse Sacconi, che poteva avere nove-dieci anni, ma ne dimostrava di meno, a parte la voce profonda e potente.

«Vabbè...» disse Eliano. «Ora rispondo a tutti...»

Appena laureato Eliano aveva deciso di rifiutare l'offerta di una multinazionale leader nel campo dell'informatica, e aspettando segnali di vita e d'invito dall'università, aveva accettato la supplenza per lo scorcio dell'anno in corso, ferie pagate, in quella scuola media a Torre Maura. *Che palle*, aveva pensato, convinto di non avere nessuno strumento per comunicare materie scientifiche ai bambini di otto-dieci anni

«Prendiamo un cerchio. Sapete cos'è?» fu la sua prima uscita in classe. E intanto disegnava alla lavagna con tratto lento e preciso.

«Anvedi...» fu il commento d'ammirazione di alcuni quando chiuse la linea.

«Vi piace? Potete farlo anche voi, ora ve lo insegno.»

«Sì. Bbonasera professo'...»

«Il disegno mi è venuto bene, perché la lavagna è a quadretti.»

Cancellò la linea.

«Nun lo fa', professo', peccato...»

«Ora vi faccio vedere. Segno il centro», e lo fece, «e poi i quattro punti cardinali, a distanza 5 dal centro.»

«Nord, Sud, Est, Ovest», facevano i ragazzini e lui segnava i punti dove dicevano loro.

«E mò, professo', che fai?»

«All'incrocio dei quadretti si possono trovare altri otto punti a distanza cinque dal centro. Cioè altri otto punti per i quali la circonferenza deve passare. Così è più facile disegnarla».

Poi si volse a loro, e chiese.

»Ma voi avete sentito parlare di Pitagora?»

»Sì. Il teorema professo'...»

«Il teorema dei quadrati...»

«Ma che dici. Dei triangoli...»

«Avete ragione tutt'e due», mediò Eliano. «Pitagora è un grande studioso dell'antichità. Ha scoperto una fondamentale proprietà dei triangoli rettangoli. E cioè che la somma dei quadrati dei cateti è uguale ...»

«Al quadrato dell'ipotenusa», continuarono tutti come in una giaculatoria.

«E allora, se un triangolo rettangolo ha i cateti 3 e 4, quant'è l'ipotenusa?»

«Cinque professo'...», fece Sacconi.

«Ma no sette, devi fare la somma», gli disse il compagno di banco.

«Ah già. Sette professo'...»

«E invece fa proprio cinque...»

E Sacconi si girò verso il compagno e gli mollò un pugno sul braccio.

«Stronzo, vedi che avevo ragione?»

«Ma hai capito perché?» gli chiese Eliano.

«Perché l'hai detto tu», fece Sacconi.

«Grazie, ma non basta. Ora te lo faccio capire meglio.»

E Eliano s'imbarcò nella storia dei quadrati. Il quadrato di 3 che fa 9. Il quadrato di 4 che fa 16. La loro somma che fa 25, ed è il quadrato di 5.

«In conclusione. La somma dei quadrati dei cateti fa proprio il quadrato dell'ipotenusa.»

«Adesso l'hai capito perché è giusto il 5?»

«No, professo'. Non ci ho capito niente.»

«È la somma dei quadrati che devi fare, non la somma e basta.»

«Eh, ma la somma dei quadrati non fa 5.»

«No. Fa 25, che è il quadrato di 5, cioè l'ipotenusa.»

«Scusate. A me mi pare complicato, professo'. Ma è sicuro che Pitagora ha detto così?»

Eliano ci pensò su un attimo. Messo così il discorso sembrava involuto anche a lui. Pitagora evidentemente aveva dovuto avere un'intuizione più immediata, si disse.

«Proviamo a dire così. Tre numeri come 3, 4 e 5 hanno la proprietà che la somma dei quadrati dei primi due fa il quadrato del terzo. Questo, Sacconi, l'hai capito?»

«Sì, professo'...»

«E allora possono essere i due cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Hai capito pure questo?»

» Sì professo'...»

«E pure il perché?»

«Il perché? Di che?»

«Del fatto che possono essere i due cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo.»

«Eh, perché ... per la storia che la somma dei quadrati ...»

«Bravo. Questo è quello che ha capito Pitagora.»

«E pure io, professo'?»

«Sì. Pure tu. E lo sai come si chiamano questi tre numeri?»

«No.»

«Non c'è nessuno che lo sa?»

Tutti si guardavano intorno, con la soddisfazione di vedere che nemmeno i vicini lo sapevano.

«Si chiamano terna Pitagorica», spiegò Eliano, visto che non toglieva la parola a nessuno.

«Solo questi tre?» chiese un ragazzino dall'ultimo banco.

«No. Tutti quelli con questa stessa proprietà.»

«Cioè che la somma dei quadrati dei primi due fa il quadrato del terzo?»

«Sì.»

«Ma ce ne sono altri?»

«E certo.»

«Per esempio?»

«Prova a pensare.»

«Coi cateti di 3 e 4 l'abbiamo fatto e l'ipotenusa viene 5. Proviamo coi cateti 3 e 5. Allora $9 + 25$, fa 34. Il prodotto 6 per 6 fa 36, e allora il numero che ha per quadrato 34 è un po' meno di 6».

Cazzo, pensò Eliano. E chi è questo?

«Bravo», gli disse. «Ma prova a trovare tre interi, come nell'esempio di prima. Parti da 5»

«Col 5 e il 6? La somma dei quadrati fa 61. Neanche ora c'è un intero con questo quadrato, perché 8 per 8 fa 64, e col 7, che viene prima, farebbe 49».

«Vero. Provane altri due.»

«Tocca al 5 e al 7. La somma dei quadrati fa 74. Non va bene. 5 e 8. La somma dei quadrati fa 89. Niente. Ma sto sbagliando?»

»No. Non stai sbagliando.»

«Vado avanti allora. 5 e 9. La somma dei quadrati fa 106. Niente. 5 e 10, viene 125. Questo sì che è un quadrato. O no, professore?»

«No 125 è 5 per 5 per 5. È un cubo.»

«Ho capito. È il cubo di cinque, ma non potrebbe essere anche il quadrato di un altro intero?»

«Cazzo, ragazzino. Come ti chiami?»

«Finzi, professore' . . .»

«Lo sai che porti il nome di un matematico famoso?»

«No.»

«Finzi, non c'è un intero col quadrato 125.»

Eliano si stava innamorando.

«E che, devo fare col 5 e con l'11?»

«Non viene.»

«Col 5 e col 12? Quant'è 12 per 12?»

«144.»

«La somma dei quadrati allora viene 169», fu la considerazione a raffica. «E non va bene. . .»

«E invece sì.»

»Perché? Chi è l'intero col quadrato 169?»

«È 13. Infatti, 13 per 13 fa. . .»

«È vero professore, fa 169. Allora un'altra terna è 5, 12 e 13.»

«Bravo.»

«Cioè il triangolo rettangolo coi cateti 5 e 12 ha l'ipotenusa uguale a 13.»

«È così. È perfetto Finzi. Sei bravo, che Dio ti benedica.»

«Magari, professore' . . . Che c'entra.»

La classe era rimasta in silenzio. Eliano continuò.

«Un cubo può anche essere un quadrato Finzi. Per esempio 64. È il cubo di 4, perché 4 per 4 per 4 fa 64»

«È vero. Ed è il quadrato di 8, perché 8 per 8 fa 64», completò il ragazzino e aggiunse.

«Anche con l'1 viene, che è quadrato e cubo di se stesso. Ma forse è un esempio cretino.»

«Non so se è un esempio cretino. Credo invece che sia un caso importante. E certamente tu puoi trovare esempi più scenografici.

Non capì perché gli era venuta in mente una luce intermittente, ogni cinque secondi. Il faro di Capo Circeo. Ma ritornò a Finzi.

«E un'altra cosa ti voglio dire. Se tu fissi come vuoi due numeri interi, essi possono essere i cateti di un triangolo rettangolo. L'ipotenusa è determinata in ogni caso. Magari alcune volte, come s'è visto negli esempi di prima, non ha valore intero. A Pitagora interessavano gli interi. Per questo si chiamano Pitagoriche le terne fatte solo di numeri interi».

«E perché a Pitagora interessavano gli interi?»

«Mi hai sfinito Finzi. Meriti un maestro più robusto di me.»

«Quella, la professoressa nostra, quando le chiedevo qualcosa, mi diceva 'zitto tu, che dormi sempre'. E a te, adesso, ti ho sfinito ...»

«La professoressa vostra adesso sono io ...» ribatté Eliano. E loro risero.

La campanella suonò e lui se ne dovette andare.

«E la circonferenza? Non ci fa vedere come si può fare?» gli chiesero i ragazzini che gli si erano fatti sotto.

«Per oggi non c'è tempo. Però ve ne faccio un'altra...» E tracciò una linea con tratto lento e sicuro, come prima, chiusa alla perfezione. «La prossima volta finisco di spiegarvi come si fa...»

Everything is Interesting

Secondo un copione sperimentato svariate volte, Andrea aveva perso il segno. Ricordava di aver interrotto la lettura, la notte precedente (o più propriamente la mattina, visto che erano le cinque), a pagina ottanta. O forse era sessanta? Fatto sta che, andando a riaprire il libro in quei dintorni, gli argomenti non apparivano eccessivamente familiari.

Decise che si trattava di pagina quarantacinque: rileggere qualche riga non avrebbe certamente nuociuto. Quello per la lettura era un amore nato molto tardi per Andrea: uniche eccezioni i testi di Matematica, Fisica, Astronomia e programmazione, di cui era stato avido fin dall'infanzia.

Il libro in questione non era un'eccezione: *The Pleasure of Finding Things Out*, di Richard Feynman¹: premio Nobel 1965 per la Fisica, lo straordinario scopritore (o forse inventore) dell'elettrodinamica quantistica.

Ha preso il Nobel quando sono nato io pensò Andrea. Poi il cambio di prospettiva. *O forse io sono nato quando lui ha preso il Nobel. Ecco, così suona meglio.*

La concentrazione, insomma, non era così profonda quel pomeriggio. Sfogliò distrattamente le pagine, senza grande convinzione, quando all'improvviso rimase colpito da una

¹Feynman, R. P., *The Pleasure of Finding Things Out*, trad. degli autori.

frase. Una di quelle frasi che cerchiamo per anni, per esprimere un principio, una convinzione che riteniamo essenzialmente nostri, per poi scoprire che qualcun altro ci aveva già pensato, magari più di trent'anni prima.

*Everything is interesting
If you go into it deeply enough*

Esatto pensò Andrea. *È proprio così!*

Era l'idea che cercava per la sua prima lezione di Fisica in seconda classico A. Trascrisse la frase col computer, senza tradurla, poi la ingrandì, fino a farne un cartello formato A4 orizzontale. In calce, a destra in basso, scrisse per esteso il nome e cognome dell'autore: Richard P. Feynman.

La mattina successiva entrò in Seconda A e mostrò il cartello alla classe. Poi lo attaccò alla lavagna con un pezzo di biadesivo. I ragazzi ancora non lo conoscevano: nelle settimane successive avrebbero fatto l'abitudine a questo modo di presentarsi in aula munito di cartelli, disegni, provocazioni, ma questa era la prima lezione: accolsero la stranezza con sguardi interrogativi.

Andrea li guardò per alcuni secondi, poi, indicando il cartello, chiese: «È vero?»

«Un momento professore», disse Massimiliano, «traduciamo e poi glielo diciamo...»

«Perfetto: è quello che volevo. Prima di rispondere devi tradurre, cioè esaminare, approfondire, capire, siamo d'accordo?»

Tutti d'accordo.

«Ottimo, ottimo. Perché quando traduci, scoprirai che la frase parla proprio del senso di esaminare, approfondire, capire...»

«Che cos'è, un paradosso come quello del mentitore?»

Andrea rassicurò l'interlocutore: «No, no: nessuna fregatura, nessun dilemma, anzi, il contrario. Traduciamo la frase:

*Tutto è interessante
se lo approfondisci a sufficienza*

«Bene, questa frase contiene il segreto per studiare la Fisica (e la Matematica, e qualunque altra cosa, ma ci limitiamo alle materie «difficili e noiose»)

Poi aggiunse: «Un'avvertenza: la versione Inglese è più precisa: parla proprio di andare dentro le cose, dice infatti *go into it*, che è più che approfondire, ma ci siamo capitati. Carina no? La frase esprime una grande verità, e cioè che tutto diviene interessante se lo approfondisci, ma, essendo espressa in una lingua straniera, diventa interessante solo se la approfondisci, nel nostro caso traducendola. Cosa che conferma il senso stesso della frase.»

Parte della classe era frastornata, ma in molti provarono a seguire quel percorso logico circolare, rimanendo coinvolti dalla costruzione e, di conseguenza, totalmente convinti del significato della frase.

«In un certo senso è parente del paradosso del mentitore, ma in senso opposto: qui il percorso logico è rafforzativo del concetto espresso dalla frase.»

Staccò il foglio dalla lavagna, camminò verso la bacheca e lo mise al centro.

«Questo resta qui: ne avrete bisogno ogni volta che spiegherò Fisica, credetemi. Vedete, nei prossimi mesi, durante le lezioni, oppure studiando a casa, vi capiterà piuttosto spesso di chiedervi: «E questo a chi interessa?»

Bene, a quel punto entrerà in gioco Richard Feynman, il nostro amico premio Nobel, che vi ripeterà: «Stai tranquillo, perché tutto diventa interessante se lo approfondisci». In

sintesi, è come quella canzone che cantano allo stadio: «Non Mollare Mai». Ecco, la differenza fra capire e non capire la Fisica sta tutta lì: chi persevera con pazienza ce la fa, chi rinuncia no.»

«Non è mica una buona presentazione professore... messa così sembra più una gara di sport estremi che una materia scolastica!»

«È vero, ed in un certo senso lo è, anzi, se ripenso al mio esame di Fisica I all'Università direi che hai decisamente ragione: Sport Estremi è una buona definizione».

«Quanto prese professore?»

«Avevo trentacinque allo scritto, sette esercizi su sette, quindi clamorosamente sopra le più rosee previsioni, poi all'orale qualcosa non funzionò bene e presi ventisette. Uscii dall'aula buttando letteralmente giù la porta per la rabbia. Poi dovetti scappare perché quelli che erano stati bocciati, alcuni dei quali per la quinta o sesta volta, volevano rincorermi. In effetti un ventisette al primo colpo era un autentico miracolo, non fu carino lamentarsene. Vabbè, vecchie storie. E comunque per voi è molto più semplice: non dovete preoccuparvi. Certo ci sarà da studiare, ma cercheremo di renderlo interessante. Pronti per la seconda brutta notizia?»

«Se proprio deve...»

«Cerco solo di essere onesto. Allora, quando comincio un corso, come prima cosa faccio sempre presente che la Matematica è quella scienza che fornisce risposte incomprensibili a domande che quasi nessuno si pone. Siete d'accordo?»

Un'affermazione che la classe sottoscriveva all'unanimità.

«Bene, la Fisica è diversa»

«La Fisica» continuò Andrea «è la scienza che fornisce risposte incomprensibili a domande che pochi si pongono. La differenza sarà pure sottile, ma c'è. Ma non è questo il punto: la brutta notizia deve ancora arrivare.»

«Eccola qui: la Fisica non è in grado di darvi risposte: non spiega un bel niente, non fornisce i perché. La Fisica è soltanto un racconto.»

«Ah sì? E, scusi, allora a che serve?»

«Hai mai usato un mezzo di trasporto in vita tua, ad esempio un'automobile, od un aereo? Ecco, senza la Fisica saresti andato a piedi. O tutt'al più a cavallo. E l'edificio in cui ci troviamo? Strutture calcolate con metodi fisici. La Fisica ci porta sulla Luna e anche più lontano, cura malattie, ci aiuta a fare diagnosi (radiografia, TAC, risonanza magnetica, PET, Ecografia, Elettrocardiogramma e così via). Devo andare avanti?»

L'idea era stata recepita

«Ma c'è di più: la Fisica, nel raccontare il mondo, la Natura, cerca comportamenti ricorrenti, fenomeni che si assomigliano, formula leggi che tendono ad unificare, sintetizzare.»

Lasciò che i ragazzi riflettessero per qualche istante, intanto si diresse verso la cattedra. Dalla cartella estrasse un foglio *A3* plastificato, lo distese sulla lavagna e lo fermò col biadesivo. Era uno schema a colori, sei cerchi, disposti regolarmente a formare un esagono, uniti da frecce a segnare il percorso logico della lezione. Si assicurò di aver catturato l'attenzione dell'uditorio, poi riprese.

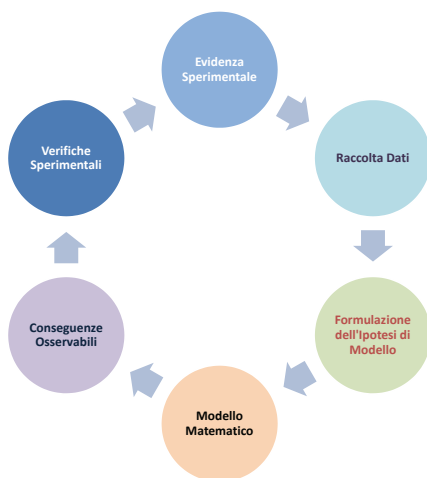
«La Fisica è una scienza sperimentale, tutto comincia dall'Osservazione dei fatti reali: quando tali osservazioni vengono condotte in modo serio e sistematico prendono il nome di Evidenze Sperimentali. Si raccolgono i dati e ci si fa un'idea del modello matematico più adatto per rappresentare quanto rilevato.

Naturalmente, questo modello deve essere testato, verificato. Quindi si torna sul campo: ancora esperimenti per controllare che tutto ciò che è previsto dal modello accada

sul serio.»

«E se non accade?» Fu l'ovvia obiezione.

«Se non accade, cioè se qualche esperimento fornisce risultati diversi da quelli previsti dal modello, allora si rifà l'esperimento, e se ancora non ci siamo, allora ricomincia il giro: altre osservazioni, altre congetture, un modello più accurato, ulteriori verifiche sperimentali, e così via.»



«Ma allora professore, non ci sono risposte definitive!»

«Bravo, esatto. Niente risposte definitive. Anzi: la storia della Fisica insegna che tutte le teorie, prima o poi, sono state superate. Magari non totalmente stravolte, ma aggiornate sì.»

«E d'altra parte, se ci pensate, la tecnologia ci mette a disposizione ogni giorno mezzi di indagine più accurati: già poco fa abbiamo ricordato gli strumenti utilizzati dai medici per la cosiddetta diagnostica per immagini: gran parte di quelle tecnologie cinquant'anni fa non c'era: possiamo dire

che il mondo percettibile si amplia, si espande continuamente. E così vengono osservati fenomeni nuovi, che richiedono nuove teorie, modelli sempre più perfezionati. È il destino delle cosiddette «verità scientifiche», spesso utilizzate dai mezzi di comunicazione in maniera distorta e strumentale per fini particolari. Il punto di partenza implicito è questo: «La Scienza possiede la verità». Bene, oggi il vostro prof di Fisica vi dice: non è vero.»

«E scusi professore, ma allora le leggi fisiche sono sbagliate?»

«Dipende da quello che ti aspetti. Ad esempio le leggi di Newton sono più che adeguate a descrivere la statica di un edificio, la caduta libera di un oggetto od il comportamento di un treno in corsa. Però cadono clamorosamente se tenti di applicarle a problemi più sofisticati. Avete presente il GPS? Parlo di quella tecnologia, che adesso si trova addirittura in alcuni telefoni cellulari, che consente di calcolare con buona precisione la propria posizione sulla superficie terrestre, basandosi sui segnali ricevuti da alcuni satelliti artificiali.»

La classe conosceva il GPS.

«Ok, allora, voi sapete che Albert Einstein scrisse due teorie della relatività: nella cosiddetta Relatività Generale, in particolare, dette una descrizione del campo gravitazionale più sofisticata di quella offerta da Newton. Bene, se il GPS nel vostro telefonino facesse i calcoli secondo il Modello di Newton, sbaglierebbe regolarmente la posizione, sarebbe praticamente inutile. Ecco un caso molto pratico in cui un modello che sembrava perfetto ha richiesto degli aggiornamenti sostanziali, richiesti dall'avanzare delle tecnologie.»

«Chi di voi ha un fratellino, o una sorellina nell'età dei perché a catena?»

Curiosità dalla classe.

«Ma sì, quell'età in cui i bambini cominciano a chiedere perché, ed ogni risposta che si dà loro suscita un nuovo perché, fino a quando l'adulto, esasperato, proferisce il classico «Perché sì!» e chiude lì argomento.»

Sì, un po' tutti avevano presente la cosa.

«Ecco, se fate quel gioco con un Fisico di professione, voi vi aspettate che, prima o poi, si giunga ai perché fondamentali della Natura, vero?»

«Certo!» fu la risposta di una biondina in terza fila. «Altrimenti che si studia a fare?»

«Beh, mi dispiace, ancora una brutta notizia: niente da fare. Niente verità assolute, niente leggi fondamentali. Un esempio?» - prese in mano il libro di Fisica - «Che cosa accade se lascio andare questo libro?»

«Il libro cade» disse la biondina dopo qualche esitazione.

«Esatto, il libro cade. Perché?»

«C'è la forza di gravità» disse un tipo ingombrante dal fondo.

«Già, la forza di gravità, quella secondo la quale due masse si attraggono. Quindi la Terra ed il libro si attraggono.» Ancora la biondina.

«Bene, vedo che siete preparati. Allora c'è la forza di gravità eh? Ottimo, PERCHÉ?»

Il nervosismo cominciò a rendersi palpabile. Dopo mezzo minuto di silenzio, qualcuno disse: «Non lo sappiamo prof, ce lo dica lei»

«Non lo sapete eh? Beh, nemmeno io; non lo sa nessuno: ve lo ripeto: nessuno sa perché i corpi si attraggono»

«Ma scusi prof: l'abbiamo detto adesso! Si attraggono perché c'è la forza di gravità!»

«Ferma lì! Argomento tautologico! Io ho chiesto: «Perché c'è la forza di gravità?» Tu mi hai risposto: «Perché c'è la forza di gravità», cioè in sostanza mi hai risposto «Perché

sì». Come dovevasi dimostrare.» Un sorrisetto soddisfatto completò l'esposizione.

«Porca miseria» – l'esclamazione proveniva dal tizio grande e grosso.

«Tranquilli: non lo sappiamo noi e non lo sa nessuno, neanche un premio Nobel. Ecco che cos'è la Fisica: un racconto, una descrizione, un insieme di modelli matematici utili per rappresentare ciò che percepiamo. Ma di verità assolute, di perché definitivi, incontrovertibili, assoluti, neanche l'ombra.»

«E scusi prof, ma la parte interessante della Fisica quando arriva?»

«Ottima domanda. Beh, ti rispondo con una promessa: ce la metterò tutta per farvela apprezzare. Con alcuni di voi ci riuscirò, spero con molti, ma solo ad una condizione: che vi fidiate di quello che vi dico. Ma per oggi non ve ne preoccupate: per adesso mi basta che abbiate capito che cosa veramente è la Fisica, e che d'ora in poi, quando sentirete parlare di «verità scientificamente accertata», suonino un allarme da qualche parte, la curiosità di capire che cosa vi vogliono vendere, dove sta la fregatura.»

«Sarebbe già un bel risultato!»

Ali d'angelo

Di quando in quando
Ruhna ricordava
d'aver visto un angelo.
«Ma sarà stato un angelo?»
si chiedeva ogni volta.

Il ricordo era preciso,
del quarantatre,
di tre anni allora,
in viaggio con la madre.
Un viaggio interminabile.
In verità
era durato tre giorni,
compresa la sosta
a Lascari,
di almeno due.

Ma era
il primo viaggio
di cui Ruhna
aveva coscienza
e ricordava;
e aveva
forse
vissuto il tempo

istante per istante
con scansione accurata
delle sensazioni.

Aggiungendo,
solo,
il vissuto interiore
e mescolando insieme
per sovrapposizione,
fatti e cose
a oniriche
fantasie,
decodifiche,
esperienze,
dilatando il tempo
a dismisura.

Così Ruhna
si ricordava d'un angelo.

A piedi nudi,
abito lungo e leggero,
accollato
celeste acqua,
un taccuino in mano,
una matita:
li porgeva alla sorella,
che se ne stava a letto:
era notte?
era malata?

E si girò
di spalle a lei,
incurvandosi,
come tavolino
su cui scrivere.

Al Signor Federale

di Campo Felice

S.P.M.

Vi raccomando la signora Acerri
e la sua bambina Ruhna.

Ha necessità

di raggiungere Lascari,
dove la cognata, moglie di
suo fratello

ora in guerra,

è sfollata coi suoi sette bambini.

Alla cognata ed ai sette nipoti,
cui è molto legata,

la signora Acerri

vuol portare conforto

e un po' di provviste,

per proprie privazioni
radunate.

Vi resterò grata.

Ricevete il mio

più devoto saluto.

La firma era illeggibile

e la data non c'era.

Non c'era già più

quando Ruhna,

a Roma,

diciassettenne,

aveva ritrovato il biglietto,

consumato dalle muffe.

O non c'era stata mai?

Un angelo?

Perché il biglietto

era libera

iniziativa di bontà?

O semplicemente
perché la ragazza
azzurra,
dai lunghi biondi capelli
aveva sulle spalle,
come Ruhna
ricordava,
bianche ali?
Ma allora, come aveva potuto
la sorella
scrivere sulle sue spalle?
O l'angelo
non c'era stato mai?

Il tempo
è una nostra impostura.
Il passato è passato
se non ci piacciamo più
o non piacciamo più
a chi ci piace ancora.
E allora
lontano
il più possibile
fuori
dalla vista e dai sensi
fino,
se si riesce,
a dimenticare.
E il futuro?
Paura
di come saremo?
O il tempo
è un ingingimento
per impotenze

ancestrali?

La Natura
non conosce il tempo.
È tutta,
nei siti dell'universo,
contemporanea a sé stessa,
aggrovigliata con la vita.
E a noi sono stabilite,
una alla volta,
pagine a sorpresa.

Si può tornare alle pagine
col pensiero,
trovandovi cose
non viste.

Oppure accade
che qualcosa si perda:
non si ricorda più,
o si versa
e si mescola altrove
generando
accostamenti,
storie parallele,
straniamento ai fatti,
smarrimento e stupore.

Campo Felice!
In un momento come quello,
il nome è una presa per il culo!
Anche
l'idea dell'angelo.
Con tutti i figli di puttana
di allora, come ora,
per il mondo.

Giusto il ricordo di un angelo!

Questi pensieri,
non certo
del quarantatrè,
sono incastonati
saldamente
nella cornice dell'angelo.

Un travaso.
li ha collocati
in quella notte,
si può dire
«per sempre»?,
a far parte di lei.

*Roma, ottobre '94
pubblicata in «Astronavi»,
Aracne editrice, Roma 1998*

N.d.A.

*Da questi versi si può evincere che anche il tempo
è un linguaggio, come la matematica*

Relatività ristretta

Bello sarebbe
con lo stesso sfondo di tenerezze
un legame sorgivo
tra noi
senz'anamnesi d'altri amori.

Per ciò si potrebbe
metterci di fronte
su due balconi,
dove io potessi vederti
mentre assorta mi pensi,
e tu invece,
non vedendomi,
restassi nell'attesa d'un incontro.

La device sarebbe
una lastra estesa
di cristallo anisotropo
tra noi.

Per forza di relatività ristretta,
allora,
il mio tempo
stagnante starebbe
di fronte al gorgo profondissimo
dei tuoi occhi a foglia

e mi sentirei
sparso ampiamente
per gli spazi aperti del mondo.

Il tuo tempo,
per gli stessi spazi proteso
in qua e in là,
molto si dilaterebbe,
invece,
cercandomi.

Potremmo infine, vecchissimi,
ritrovarci insieme
di fronte al Golden Gate bridge
nell'ora in cui il tramonto,
terminato di fiammeggiare,
spinge fiotti di nebbia
sulla baia
per nascondere la città,
lasciandoci soli.

Facilissimo allora
sarebbe per noi,
guardandoci negli occhi,
distaccarci dal passato,
minuziosamente narrandoci,
per tutta nottata,
antiche storie
e, dimenticando,
risalire il vortice del tempo,
e nell'alba ritrovarci,
ancora nebbia sulla baia,
e neanche il ponte ancora,
giovannissimi innamorati.

Bello sarebbe,

quando il sole brillante del mattino
tornasse a mutare
nebbie in certezze,
attraversare il ponte,
ben stretti tenendoci per mano
per non più separare i nostri tempi,
correre verso la città
e raccogliere
il nostro legame sorgivo,
con la sola anamnesi
ormai
della nottata insieme.

San Francisco, 1989

N.d.A.
*Il linguaggio della Fisica
può spiegare anche
contenuti emotivi*

Both Are Infinite

ROMEO¹

O, wilt thou leave me so unsatisfied?

JULIET

What satisfaction canst thou have to-night?

ROMEO

The exchange of thy love's faithful vow for mine.

JULIET

I gave thee mine before thou didst request it:

And yet I would it were to give again.

ROMEO

Wouldst thou withdraw it? for what purpose,
love?

JULIET

But to be frank, and give it thee again.

And yet I wish but for the thing I have:

My bounty is as boundless as the sea,

My love as deep; the more I give to thee,

The more I have, for both are infinite.

Naturalmente gli alunni della III Scientifico non fecero una piega. Che il prof non fosse normale era accertato, dunque perché sorprendersi se una lezione di Matematica stava

¹William Shakespeare, *Romeo and Juliet*, traduzione degli autori

cominciando come non te l'aspetti, con una citazione tratta da *Romeo and Juliet* di William Shakespeare? In lingua originale, oltretutto.

Si disposero pazientemente all'ascolto, come al solito. Andrea li apprezzava per questo: era una classe che sapeva ascoltare.

E dialogare: «Ricordate quella volta in prima quando vi chiesi quanto fa uno diviso zero?»

Risposero che sì, ricordavano perfettamente.

«Le vostre risposte di allora?»

«Eh, qualcuno disse zero»

«Sbagliato»

«Sì, allora qualcun altro disse uno»

«Sbagliato pure questo, di brutto»

«Poi qualcuno disse infinito»

«Già, e molti pensarono che fosse giusto, ricordate?»

«Però lei ci disse che non andava bene»

«Dissi di più, dissi di non nominare mai più la parola infinito fino a nuovo ordine...»

«E' vero, che l'avremmo visto più avanti»

«Già, e ora ci siamo» concluse Andrea trionfalmente.

«Scusi prof. ma che c'entra quella cosa che ci ha letto?»

«E' Shakespeare, *Romeo and Juliet*»

«Ecco sì, Shakespeare, scusi ma che c'entra con l'infinito?»

Andrea puntò il dito verso la lavagna: «Guardate l'ultima parola. Tra l'altro questa è una parte della famosa scena del balcone, quella che comincia con *Romeo*, *Oh Romeo*. . . E su Shakespeare non ammetto idee contrarie: ritengo che la possibilità di leggerlo in originale, senza traduzione, sia già un eccellente motivo per studiare Inglese. Allora, l'ultima parola?»

«L'ultima parola?» esclamò un alunno dalla seconda fila, «Beh effettivamente dice infinite, che sicuramente si traduce infinito, però tutto il resto non è facile, non si trova una traduzione?»

«Ragazzi, siete pronti ad una rivelazione sconvolgente?»

Naturalmente sì, erano pronti ad una ennesima rivelazione sconvolgente

«Pensate un po' che in tanti anni non ho ancora trovato una definizione di infinito che sia più efficace di quella che ci offre qui Shakespeare. E due righe sopra, tanto per gradire, ci dice anche che cosa si intende con *illimitato*. Vedete? *Boundless, illimitato*»

«Ma perché, non significano la stessa cosa? *Infinito* e *Illimitato*?»

«No, sono due concetti diversi. E Shakespeare lo sapeva. E lo ha scritto, da quel genio che era, in maniera sublime»

Andrea fece qualche passo in mezzo ai banchi. «Mozione d'ordine: prima di tutto mettiamo a posto la faccenda di uno diviso zero, ok? Idee?»

«La divisione non esiste»

Sentì la vocina provenire dalle sue spalle, la riconobbe subito. *Magic Moment*... uno di quei momenti che rendono giustizia a tante ore passate a raccontare la matematica, sperando che qualcosa resti...

«In che senso Alessia?»

«Lei ci ha detto che la divisione non esiste in algebra, come la sottrazione, che significa somma con l'opposto»

«Brava, e che cos'è l'opposto?»

«Per esempio l'opposto di due è meno due, perché se li sommo insieme fanno zero»

«E che cos'ha di speciale lo zero?»

Alessia era scatenata: «Che se lo sommo a qualunque altro numero lo lascia inalterato, per questo si chiama elemento neutro della somma»

«E con la divisione come si fa?»

«Beh, fare tre diviso due in realtà significa moltiplicare tre per l'inverso di due»

«L'inverso di due... Di solito lo chiamiamo un mezzo, vero?»

«Sì, ed infatti è quel numero che, moltiplicato per due, fa uno»

Perfetto pensò Andrea... «Ed uno che cos'ha di speciale?»

Un'altra voce, stavolta dal fondo della classe: «Uno è per la moltiplicazione quello che zero è per la somma: l'elemento neutro, infatti qualunque numero moltiplicato per uno resta inalterato»

«Congratulazioni» disse Andrea, «adesso facciamo il passo che manca: abbiamo capito che uno fratto due significa l'inverso di due, cioè quel numero che moltiplicato per due restituisce uno. Questo va anche perfettamente d'accordo con quello che vi hanno insegnato alle elementari: ricordate? Una certa fetta di torta corrispondeva alla frazione un terzo se, prendendo tre pezzi come quello, si ricostruiva la torta intera. Tutto torna, no?»

Nessuna obiezione dalla classe.

«E allora ci siamo: uno diviso zero significa chiedere quale numero, se moltiplicato per zero, restituisce uno. Bene, quel numero non esiste, per il semplice motivo che qualunque numero moltiplicato per zero restituisce zero. Ok? Quindi

$$\frac{1}{0}$$

è un'operazione impossibile: non ha risultato. Chiaro?»

Era chiaro. A questo punto, una volta sgomberato il campo dalle superstizioni, restava accertato un fatto: infinito non è il risultato di alcuna operazione conosciuta.

E allora che cos'è?

«Scusate, prima di passare a William, giusto per scrupolo, lo sapete quanto fa zero diviso zero, vero?»

«Non viene indeterminato?»

«Sì, ottimo, ma perché?»

Una voce forse inattesa, e per questo ancora più gradita: Jacopo dal primo banco sulla destra: «perché uno per zero fa zero, due per zero fa zero, qualunque numero per zero fa zero, e allora non c'è una soluzione ben determinata, perché tutti i numeri potrebbero essere risultato di quell'operazione.»

Ottimo pensò Andrea: «Perfetto, è esattamente così»

«Bene ragazzi, torniamo a Shakespeare. Seguitemi nella traduzione, vi prometto che ne vale la pena, perché ci porterà per mano alla definizione che cerchiamo, e lo farà usando le nostre passioni: il modo migliore per capire.»

«Comincia Romeo, nel momento in cui ha capito che Giulietta lo sta salutando. Le dice:

Vuoi lasciarmi così insoddisfatto?

Al che Giulietta – e guardate come Shakespeare gioca sull'equivoco per far crescere la tensione –

Quale soddisfazione puoi avere stanotte?

E Romeo scioglie l'equivoco:

Lo scambio della tua sincera promessa d'amore
con la mia

Giulietta, sollevata, risponde

Ti ho donato la mia prima che tu me la chiedessi
Eppure vorrei che fosse ancora mia da donare

Ancora un piccolo equivoco, stavolta è Romeo a chiedere

Vorresti riprendertela? E a che scopo, amore?

Ed ecco la chiusura di Giulietta:

Ma per essere sincera, e fartene dono di nuovo.
Eppure, non desidero altro che ciò che ho:
La mia ricompensa è illimitata come il mare,
il mio amore altrettanto profondo; più te ne do,
più ne possiedo, perché entrambi sono infiniti.

Qui c'è un'alternanza di figurazioni e di comparazioni; lo scopo è quello di attribuire due qualità caratteristiche all'amore: l'essere *illimitato* ed *infinito*.»

La classe continuava a seguire in silenzio. Qualcuno prendeva appunti.

«Ecco, ci siamo: qui c'è la definizione di infinito: *più te ne do, più ne possiedo*. E' straordinario, la definizione intuitiva di insieme infinito che si dà in Algebra è esattamente questa: un insieme per il quale non ha mai fine l'operazione di estrarne un elemento alla volta: *più elementi ti dà, più ne possiede*... Non è fantastico?»

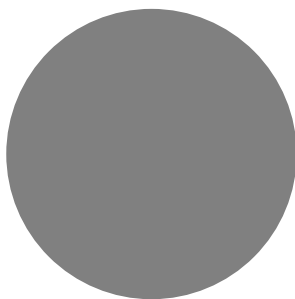
Forse non a tutti gli studenti sembrava così fantastico, ma a qualcuno sì. E gli altri, in ogni caso, non si erano addormentati.

«E adesso vediamo questo *boundless, illimitato*. Tanto per cominciare, il vocabolo originale è più suggestivo, più immediato della traduzione in Italiano: *boundless* significa anche «senza confini». Ed è esattamente il significato che stiamo cercando: Shakespeare parla del mare: pensate agli oceani, pensate ad un esploratore a bordo della sua barca,

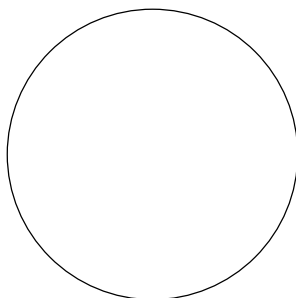
che naviga senza mai fermarsi. . . ogni tanto dovrà fare il giro intorno ad un'isola, o ad un continente, ma non incontrerà mai un confine invalicabile, definitivo. Eppure, l'oceano non è infinito: ha una superficie sicuramente finita: è finito ma illimitato.»

Andrea si guardò intorno; ovviamente questa seconda nozione era un po' più dura da digerire, ma aveva destato curiosità, e questo era ciò che contava.

«Un'ultima precisazione, a beneficio di coloro i quali un giorno studieranno topologia e potrebbero pensare male del sottoscritto. . . Allora, quella del mare è una figurazione utilizzata da Shakespeare, ed è talmente evocativa e suggestiva che ci suggerisce il concetto giusto anche se non è geometricamente del tutto corretta. L'esempio più corretto di una figura finita ma illimitata può essere la superficie di una sfera. La superficie, ok? Non la sfera come solido, ma la sua superficie. C'è la stessa differenza che troviamo tra il cerchio e la circonferenza: il cerchio è la figura piana,



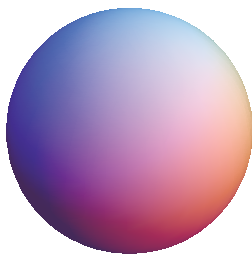
la circonferenza è il suo contorno, ed è una linea chiusa, la sua *frontiera*.



Bene, la superficie sferica è, analogamente, la frontiera della sfera. E se la sfera ha raggio R , allora la superficie sferica è data da

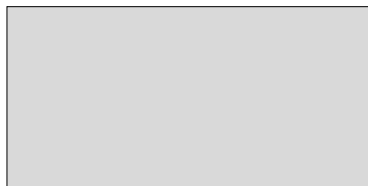
$$4\pi R^2$$

dunque è sicuramente finita.



Però, voi potete partire da un punto qualunque su questa superficie e andare in giro tranquillamente per tutto il tempo che volete: non cadrete mai di sotto, non incontrerete mai un confine invalicabile! Diverso il discorso se ad esempio

considerate un foglio di carta: è sicuramente finito (se il foglio è rettangolare come spesso accade l'area è data da base per altezza), ma è anche limitato: partendo da un punto e muovendosi a caso, prima o poi si finisce per incontrare un bordo: il confine o *frontiera* del foglio.»



Andrea cercò il conforto dei ragazzi. «Bello eh? Almeno spero. . . Per oggi abbiamo fatto più che abbastanza, l'infinito e l'illimitato, ma soprattutto, Shakespeare. . . Ve l'ho mai detto che da solo quest'uomo è un'ottima ragione per imparare l'Inglese?»

Gli sguardi dei ragazzi dissero che sì, glielo aveva già detto, circa mezz'ora prima, ma c'era ancora un'ultima questione:

«Scusi prof. ma come va a finire l'esploratore?»

«Eh, come va a finire . . . L'esploratore esplora, gira per gli oceani e non si ferma mai»

«Poveraccio! E non si rende conto che sta andando in tondo? Non può succedere che prima o poi si accorga del trucco?»

«In effetti sì, se ne può accorgere. Infatti noi ce ne siamo accorti: non abbiamo avuto bisogno di vedere la Terra dallo spazio per capire che ci muovevamo su una superficie sferica, giusto?»

«Quindi il discorso non funziona!»

«Funziona, funziona. . . funziona anche meglio se, invece della Terra, immaginate una grande sfera completamente

uniforme: sulla sua superficie non ci sono continenti, isole, scogli: solo acqua.»

«Monotono prof.»

«Sì, molto. Ed in questo caso il navigatore non ha punti di riferimento, non ha modo di capire se sta andando in tondo oppure no. E se gli togliamo anche l'ultimo riferimento rimasto, le stelle, insomma tutti i fenomeni celesti, potrà pensare di trovarsi su una superficie infinita. Affascinante, no? L'illimitato che si confonde con l'infinito. Ma facciamo un altro passo: una volta persi tutti i punti di riferimento, il navigante si trova su una superficie sferica fatta solo di acqua, apparentemente, per i suoi sensi, infinita. Non c'è differenza tra un punto ed un altro, quindi lo stesso concetto di movimento perde significato. E allora basta un solo punto, uno qualunque, per riassumere in sé l'intero pianeta, che però, nonostante sia finito, appare infinito al navigante. Questione di percezione, l'uno e l'infinito che coincidono. Sarebbe piaciuto a Platone.»

Al suono della campanella uscirono dall'aula. Federico si soffermò davanti ad Andrea. Lo guardò un attimo, poi, riprendendo a camminare, disse: «Uno e infinito coincidono? Certo professò, manco Superquark eh?»

Antes de Amarte

Antes de amarte, amor, nada era mio:

...

hasta que tu belleza y tu pobreza
llenaron el otoño de regalos¹.

Stavolta è Spagnolo questo si leggeva nello sguardo dei ragazzi della terza quando Andrea staccò il gesso dalla lavagna aggiungendo:

«è di Pablo Neruda.»

«È Spagnolo, vero prof?»

«Eh sì, è Spagnolo... Qualcuno di voi parla Spagnolo?»

No, nessuno in classe parlava Spagnolo, però lo avevano studiato per un paio d'anni.

«Mi aiutate a tradurre?»

«Scusi prof. oggi niente Mate?»

«Sì sì, come no?»

«Ah vabbè»

«Allora, *prima di amarti, amore, nulla era mio*»

«Che vuol dire *vacile*?»

«E *calles*?»

«E *cenicientos*?»

¹ Pablo Neruda, in *Cien sonetos de amor* (XXV), Sexta edición, 1998 Barcelona. Traduzione degli autori.

«Scusi prof, non possiamo usare un vocabolario?»

«Ma lei la conosce no? Non ce lo può dire lei?»

«No, fate finta che io sia esattamente come voi: non conosco traduzioni o altro»

La mano alzata di Federica:

«Ho un'idea migliore, perché non chiediamo al prof di educazione fisica che è di madre lingua?»

Andrea capì che la lezione stava prendendo la piega desiderata.

Perché la curiosità esiste, soprattutto a sedici anni, basta stimolarla nel modo giusto, poi i ragazzi fanno tutto da soli.

«Ottima idea, allora facciamo così: tutte le parole incomprensibili le scriviamo da una parte, poi andiamo a parlare col collega, ok?»

Naturalmente era ok.

Dopo una decina di minuti una piccola delegazione di studenti andò a chiedere aiuto al professore di educazione fisica, che si mostrò felice di dare una mano. Tra l'altro conosceva quella poesia e la lesse insieme a loro.

Tornarono con le parole mancanti e tante nuove idee; ne parlarono con i compagni poi tutti insieme scrissero la traduzione ufficiale della terza A.

«Allora, che ne pensate?» chiese Andrea

«Bella, soprattutto la parte finale» era la voce di Carlotta

«Sì, dove dice *tutto era degli altri e di nessuno, // fin quando la tua bellezza e la tua povertà // riempiono l'autunno di regali* ... È bellissimo *riempiono l'autunno di regali*» era Sara a parlare

«Sì è molto bello il finale, ma se ci pensate tutta la parte iniziale, che descrive questo poveraccio che non ha nulla, non conosce nulla, vede tutto vacuo, morto, muto, frequenta hangar crudeli, saloni polverosi; quest'uomo che vede solo abbandono e decadenza, e per il quale è tutto alieno, da una

tale sensazione di squallore che poi viviamo gli ultimi due versi come una liberazione: insomma, i primi dodici versi sono necessari per dare un senso più profondo agli ultimi due.»

Tutti d'accordo in proposito, Andrea fu anche gradevolmente sorpreso nello scoprire che tre o quattro ragazze stavano furtivamente copiando la poesia *in lingua originale!* sul loro diario, tra un «Buon Compleanno Fede» ed uno «SMILE» fatto col pennarello rosso a tutta pagina.

«Sapete, credo che una poesia come questa giustifichi da sola...»

«... lo studio dello Spagnolo, si prof, l'avevamo sospettato»

«Eh sì ragazzi, ma non banalizziamo, immaginate che meraviglia poter sentire quello che sentiva Neruda nello scrivere questa poesia, esattamente come l'ha pensata, senza doverla tradurre? Perché nella traduzione qualcosa va sempre perduto, perché la musicalità, il ritmo, le cadenze cambiano, gli accenti si modificano. Vi faccio un esempio, avete mai sentito una canzone in Inglese tradotta in Italiano? Ecco, non è proprio la stessa cosa. Oppure provate a leggervi un pezzo della Divina Commedia tradotta in Inglese: un disastro, un autentico disastro.»

«Bene, scommetto che siete curiosi di sapere perché questa è una lezione di Matematica.»

Scommessa facilmente vinta: i ragazzi erano estremamente curiosi di sapere che cosa cavolo c'entrasse quella straordinaria poesia con la fredda tragica realtà della Matematica.

«La Matematica è un linguaggio, esattamente come l'Italiano, l'Inglese o lo Spagnolo, o la Musica, od il Cinema, la Pittura, la Scult...»

«Abbiamo capito prof.»

«Perfetto, ma fatemi chiarire meglio: la Matematica è più vicina alla Pittura o alla Musica che all'Italiano o allo Spagnolo»

«La Matematica è universale: si legge e si scrive allo stesso modo in ogni luogo di questo pianeta: per capirmi con un matematico tedesco non ho bisogno di parlare la stessa lingua: mi basta la Matematica»

«Però, vedete, se la Matematica è un linguaggio, una forma di comunicazione, allora deve avere alcune caratteristiche: un vocabolario, delle regole di uso dei vocaboli, delle basi comuni concordate in modo tale che tutti utilizzino questi vocaboli allo stesso modo, senza equivoci»

«E poi, così come la Pittura, la Scultura, insomma le Arti Figurative, descrivono la realtà concreta e visibile, anche la Matematica sarà stata creata per raccontare qualcosa, o no?»

«Quadrati e triangoli?» fu la sconcertante risposta

Ad Andrea non era sfuggito il tocco di perfido sarcasmo, ma c'era del vero in quelle parole: francamente non è così esaltante passare ore ed ore ad imparare definizioni e teoremi di geometria per poi essere in grado – rullo di tamburi – di calcolare l'area di un quadrato a partire dalla sua diagonale.

Non c'è da stupirsi, pensava Andrea, se alcuni (molti?) preferiscono impiegare il tempo in altri modi, stando al telefono con gli amici, girando in macchinetta, guardando Maria De Filippi o provando la nuova combinazione crocetta-triangolo-quadrato a Pro Evolution Soccer.

Perché nel ventunesimo secolo la concorrenza è agguerrita: c'è TV a tutte le ore, la Playstation reclama tempo, i telefoni cellulari, soprattutto grazie agli SMS, rendono la comunicazione possibile in ogni luogo ed ogni omento, e non più circoscrivibile nel tempo e nello spazio.

Soprattutto, tutto ciò rischia di essere *più attraente* dell'area del quadrato.

Anche le lezioni, come momento di comunicazione, entrano in gara con le migliaia di stimolazioni alle quali ogni adolescente è continuamente sottoposto.

Gli insegnanti, mediamente, non hanno la presenza di Brad Pitt o Belen, la brillantezza di Bonolis e Fiorello, la tecnica della comunicazione di Mentana o Vespa, la cultura e la passione di Gabriele La Porta.

Non possono «far partire le immagini», non preparano la loro lezione con l'aiuto di un esercito di redattori; ma ve l'immaginate il prof di Fisica che, raccontando le leggi di Maxwell, dice ad un certo punto «Vediamo l'RVM» ed oplà, si abbassano le luci, e sul maxischermo sedici noni di trentacinque metri quadri ecco disegni, grafici, un servizio scientifico realizzato ad hoc sull'argomento.

No, è una causa persa, la scuola è rimasta all'altro secolo, e queste risposte sul quadrato e sul triangolo ce le meritiamo tutte. Prendiamo e portiamo a casa.

Questo pensò Andrea in quei pochi secondi, poi si scosse improvvisamente e disse: «Quadrati e triangoli sono le parole, i vocaboli, e vi faccio notare che, nel caso della poesia di Neruda, abbiamo avuto bisogno di qualcuno che ci dicesse che cosa intendono i suoi conterranei quando usano quelle parole: esattamente come quando io vi racconto che cosa intendo per triangolo, o per quadrato. Facciamo un esempio: che cosa intendiamo dire con la parola circonferenza?»

«I punti del piano che hanno distanza fissa dal centro» rispose Alessia

«Già, e dal momento in cui tutti siamo d'accordo su questo, da quel momento in poi, possiamo utilizzare la parola «circonferenza» per comunicare tra di noi, capite? La possiamo utilizzare per fare ragionamenti più complessi, tipo chiederci quante intersezioni ci sono tra un fascio di rette ed una circonferenza, e così via»

Perplessità in aula.

«Ragazzi, mi rendo conto che non è proprio come una bella poesia, ma non è tutto qui.»

«Vedete, quest'anno abbiamo cominciato a studiare la Fisica, e penso che sarete tutti d'accordo sul fatto che c'è tanta Matematica dentro: bene, la Fisica è proprio una di quelle materie in cui si trovano applicazioni straordinarie della Matematica, e per applicazioni intendo modelli che ci consentono di descrivere e raccontare, quindi comunicare a proposito di cose discretamente interessanti tipo le orbite dei pianeti, il volo di un aereo, la costruzione di un ponte, o di un edificio»

«Sì prof, però in tre mesi la cosa più concreta che abbiamo visto è la bolla d'aria che saliva nella cannuccia...»

«Mi rendo conto, e questo è il problema centrale: ci vuole tempo e pazienza. Prima di trovare applicazioni belle ed interessanti della Fisica del terzo anno mi dovrete dare la vostra attenzione ancora per un po': non perché non si possano fare esperimenti di Fisica il primo giorno di scuola, anzi. No, il punto è che se vogliamo utilizzare la Matematica come linguaggio della Fisica allora c'è un po' da lavorare: questo sì. Ed i tempi, vedete, non sono quelli di uno spot pubblicitario: no, non bastano venti secondi per arrivare al punto. In molti casi occorre un'ora per dimostrare un risultato, e magari a prima vista non si capisce nemmeno a che diavolo possa servire. Insomma, prima di arrivare a qualcosa di divertente, c'è un po' da combattere. Un bel po'. Questa è la verità, però vi assicuro che alla fine ne vale la pena, e che nessuno si pente del tempo impiegato a studiare, capire, approfondire, imprecare (soprattutto quest'ultima).»

«Professo', 'na tragedia!»

«Se vi concentrate sulle imprecazioni direi di sì, ma se vi soffermate sulla soddisfazione di superare ogni giorno il proprio limite allora il discorso cambia: una piccola sfida

ogni giorno, un bel risultato alla fine. Che ve ne pare?»

«Che sarebbe meglio trovare un modo più rapido prof»

«E meno faticoso»

Più o meno tutta la classe annuiva

«Spero almeno di avervi incuriosito»

Risposero che sì, li aveva incuriositi. Ma la poesia?

Andrea si girò verso la lavagna.

«La poesia. *Antes de amarte*. Che bella»

«Bene, vi dico una cosa. Un giorno vi potrebbe capitare di sentirvi come quell'uomo lì; nella vita può accadere. Bene, se in quei giorni grigi, squallidi, inutili, vi capiterà di incontrare quella persona speciale che riempirà il vostro autunno di regali, allora tenetevela stretta, perché è quella giusta.»

Fermat

Angolo retto¹:

rette che si incontrano formando quattro angoli uguali,
oppure formando angoli retti,
ovvero formando angoli di 90 gradi.

Nella prima definizione occorre avere il concetto di uguaglianza di angoli.

Nella seconda la cognizione dell'angolo retto.

Nella terza la nozione di misura degli angoli.

Quando Pitagora ha formulato il suo noto teorema probabilmente non aveva il concetto di rette perpendicolari, ma, passeggiando per la spiaggia di Psiliammos, deve aver visto pietre con forme di triangolo e avrà sintetizzato, tutt'assie-me, che in un triangolo fatto in un certo modo, succede una certa cosa:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

che i quadrati costruiti sui cateti (a , b) hanno la somma equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa (c). In sostanza ha scoperto due situazioni strettamente correlate:

¹Vedi La città di *Uhr* in Fulvio Bongiorno, *Universi Paralleli*, Piero Manni Editore, San Cesario di Lecce 2004. Vedi Frontone in Fulvio Bongiorno: *Il Percorso dei segni*, Aracne editrice Roma, 2000.

1. la presenza, in un triangolo, di un angolo retto;
2. la relazione che, in tal caso, intercorre tra i lati.

Pitagora è vissuto nel sesto secolo avanti Cristo tra Samos, in Grecia, dov'è nato, l'Egitto e la Magna Grecia.

Ha senso ancora oggi dover dimostrare questa proposizione? Non è un *accanimento geometrico*?

Il fatto che essa non sia mai stata contraddetta in 2.500 anni, mi sembra una dimostrazione più che formale del teorema. Si può parlare in quest'ottica di *dimostrazione storica* dei teoremi?

In altri termini, ma introducendo un'idea nuova, se per la statica di una costruzione complessa, occorre garantire che tra gli elementi dei triangoli rettangoli della sua struttura sia verificata la relazione di Pitagora, mi posso fidare della dimostrazione storica, o potrei avere maggiore fiducia in una dimostrazione formale di tipo astratto geometrico-matematico?

Nei 2.500 anni circa dalla sua enunciazione, il teorema di Pitagora non ha mai fallito: allora, di conseguenza nessun ponte basato su quell'asserto sarebbe crollato e allora quale ragione c'è che debba cadere nel futuro?

Il rischio sarebbe minore, forse, in presenza di una dimostrazione formale?

L'argomentazione, benché portata nel modo corretto e ben coerente con il tipo di problematica che intendo introdurre, non credo che abbia avuto alcun impatto emotivo sul lettore, perché l'acquisizione del teorema di Pitagora è praticamente universale e indiscussa.

Ma cambiamo teorema.

Per esempio, la statica del ponte di cui parlavamo prima, richieda invece della validità delle teorema di Pitagora, quella

del teorema di Fermat: quello che afferma che la relazione tra interi

$$a^n + b^n = c^n$$

non è mai verificata per n maggiore di 2.

La storia ci rimanda che l'avvocato Pierre de Fermat era appassionato di Teoria dei Numeri, e spesso andava a consultare libri sull'argomento nella biblioteca del convento dei Francescani a Beaumont de Lomagne, dove aveva studiato. Un giorno, stava leggendo un volume dal titolo 'De Arithmetica' annotò la sua affermazione sul margine di una pagina col commento «Al riguardo ho scoperto una veramente rimarchevole dimostrazione, che questo margine è troppo esiguo per contenere».

Questo aveva annotato Pierre, senza neppure sospettare che questa cosa gli avrebbe dato grande fama.

Fermat non ebbe mai la consapevolezza di aver enunciato il Grande Teorema di Fermat, perché le sue pregevolissime annotazioni di matematica sono state rese pubbliche dal figlio, né si trovò alcun documento in cui si spiegasse la dimostrazione dell'annotazione a margine del De Arithmetica.

Sappiamo invece che c'è stata su quell'enunciato una fioritura di dimostrazioni che, una dopo l'altra, si sono rivelate errate. Poi l'avvento dei calcolatori elettronici ha sgomberato il terreno del dubbio per valori di a , b , c abbastanza grandi ed n ben maggiore di 2, ma senza arrivare a una dimostrazione astratta formale, ineccepibile per tutti i casi, come sosteneva Fermat.

Mi sembrano, a questo punto, importanti due osservazioni:

La prima: la dimostrazione di cui si sarebbe accontentato Fermat non sarebbe più soddisfacente per i matematici contemporanei,

La seconda: non si può pensare che le nuove acquisizioni nel campo di una teoria possano semplificare le dimostrazioni, perché, al contrario, tanto più il campo si amplia nei suoi termini formali, tanto più si stringe il margine della libertà dei percorsi ammissibili.

Insomma, un gatto che si morde la coda.

Nel giugno del 1993 il matematico Andrew John Wiles tenne tre conferenze al Newton Institute dell'Università di Cambridge, nella terza delle quali sostanzialmente viene presentata la dimostrazione del famoso teorema. Ma occorreranno ancora cinque anni di lavoro per levigare alcuni aspetti formali. Infatti solo nel 1998 la dimostrazione viene accettata in via ufficiale dalla International Mathematical Union, la società internazionale nella quale sono consociate tutte le associazioni di matematici militanti.

Si ritorni al progetto della costruzione del ponte di cui s'è detto. Si faccia l'ipotesi che la statica richieda che sia verificata la condizione del teorema di Fermat. Sareste dell'idea di procedere alla costruzione, sulla base dell'esperienza storica della verità dell'enunciato, o blocchereste tutto, credendo che da un momento all'altro si trovasse che la congettura era sbagliata?

Vorrei sperare che più di qualcuno risponderebbe che non bloccherebbe nulla.

Personalmente cancellerei volentieri una matematica abortiva, fiorita, si fa per dire, in tre secoli, che ha prodotto pagine su pagine, per lo più errate, per provare una cosa che Fermat aveva pensato di poter dimostrare, se non nel margine della pagina del libro della biblioteca, non certo in uno spazio di centinaia di pagine.

Lode a Fermat e vituperio ai finti matematici delle pagine sbagliate o esageratamente numerose.

Basta.

Per me il teorema di Fermat è sempre stato vero.

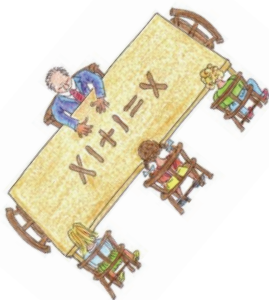
Anche se qualcuno in futuro trovasse un controesempio.

Il teorema resterebbe vero, per quello che Fermat voleva dire.

Ma dirò di più, sarebbe perfino auspicabile che qualcuno potesse trovare un controesempio: per sapere che cosa era sfuggito ad una persona dell'acume di Fermat.

Faccio un esempio: un gioco.

Nell'aula il docente, rivolto ai suoi 200 allievi compone, sulla cattedra e con bacchette di sugheri dei boschi dei Pirenei la scrittura del disegno, ove tutto è riportato in pianta. Guardate bene. Pensate, come probabilmente hanno pensato gli allievi (solo tre nel disegno), che la scrittura sia falsa?



E se vi mettete dalla parte del docente?



Ora, probabilmente, vi sembrerà vera.

In realtà per il docente è stata sempre vera. Sono stati gli allievi, semmai, che non hanno capito ciò che il docente voleva dire esattamente.

Se si capiscono, si accordano facilmente; sia sulla posizione del vero che su quella del falso.

Così, secondo la prospettiva di Fermat il teorema è vero: nessuno in questi anni ha trovato una prospettiva che lo mostri falso.

E anche se qualcuno trovasse qualcosa, l'enunciato sarebbe comunque apparso non falso per tutti gli uomini che ne siano venuti in contatto nel corso degli ultimi tre secoli.

Molte congetture possono essere avvincenti benché ampiamente contraddittorie.

Mettiamola in un altro modo.

In questi tre secoli, voglio dire da Fermat fino ai nostri giorni, controesempi alla tesi di Fermat non se ne sono trovati. Anche se Fermat stesso ne avrà tentati molti. Per lui allora sarebbe senz'altro vero affermare che:

«Per quanti interi io abbia provato, non ho trovato alcuna terna che verifica la condizione

$$a^n + b^n = c^n \text{ con } n > 2$$

come per noi sarebbe vero che:

«Per quanti interi siano stati provati in questi secoli, non si è trovato alcuna terna che verifichi la condizione suddetta»
Come quando si diceva, ritenendosi indubbiamente nel vero, che

$$2 + 2 = 4$$

Gli algebristi postrusselliani potrebbero argomentare che, ad esempio nel campo residuo modulo 3,

$$2 + 2 = 1$$

Ma è pur vero che nel campo residuo modulo 3, l'intero 1 è congruente al 4, e perciò, in ultima analisi, anche prendendo atto delle acquisizioni dell'Algebra Astratta, il fatto che $2 + 2$ fa 4 resterebbe vero nella sostanza.

6 marzo 2009

Quella mattina, andando a scuola, Andrea si chiedeva che cosa fosse rimasto nei ragazzi della terza scientifico di quella visita alla università di Roma Tre di due giorni prima.

Sicuramente le due ore e mezza passate tra autobus e tram, vista la distanza siderale che separava la Vasca Navale (mai capito a che cosa fosse dovuto questo nome) da scuola, situata a Roma Nord.

E poi quella mezz'ora a parlare all'aria aperta, tra sacchetti di patatine e bibite in lattina, gli zaini sparsi a terra, mentre alcuni avevano organizzato un mini torneo di calcio balilla.

Ma la lezione? Che cosa era rimasto di quella lezione?

Andrea aveva chiesto a Fulvio di tenere una lezione per la sua classe, a scuola. Fulvio aveva parlato del teorema di Pitagora, anzi no, aveva parlato di Pitagora, della spiaggia dell'isola di Samo, del Sole che d'estate a mezzogiorno è alto a picco sul mare, e di certi sassi che l'acqua nei secoli ha sagomato nelle forme geometriche più elementari: i triangoli.

Ai ragazzi era piaciuta quella lezione, la ricordavano spesso. Qualche giorno prima, Francesca aveva fermato Andrea durante l'intervallo delle dieci; gli aveva chiesto: «Ma professore, veramente Pitagora inventò il teorema per tentativi, come ha detto il suo amico?»

Andrea l'aveva guardata, poi aveva risposto: «Non lo so, io non c'ero... ma può essere. E poi non è importante com'è andata veramente: la cosa che conta di più è che tu continui a chiedertelo, a fare ipotesi, ad essere curiosa»

Facoltà di Ingegneria, corso di Analisi Matematica II, prima lezione dell'anno. Fulvio ovviamente era stato subito al gioco: «Se io ho fatto lezione ai tuoi, adesso tu ricambi facendo lezione ai miei, però porta i tuoi ragazzi, così conoscono l'ambiente universitario, respirano l'atmosfera, si fanno un'idea.»

Pensava a quella strana sensazione nel vederli lontani, dispersi giù in fondo alla grande aula, mimetizzati tra gli universitari che facevano risaltare ancora di più i loro sedici anni. Però attenti, silenziosi, curiosi come e forse più di quanto li avesse mai visti durante le sue lezioni.

«L'integrale curvilineo di una forma differenziale lineare» Questo era l'argomento della lezione. Molto universitario, molto specialistico. Andrea lo aveva scelto perché era anche un argomento di Fisica del III scientifico: il lavoro di una forza. Due modi diversi di dire la stessa cosa.

«Che cosa avranno capito veramente?» Continuava a chiederselo mentre parcheggiava l'auto. Entrò in classe, fece l'appello, studiò per qualche secondo i ragazzi.

Fulvio aveva ragione. C'era un qualcosa di diverso, la visita a Roma Tre aveva lasciato il segno. Andrea decise di non lasciarsi sfuggire l'attimo. «Se mi date tutta la vostra attenzione, il massimo della concentrazione di cui siete capaci, in un paio d'ore riprendiamo l'argomento di quella lezione, quella di Analisi di martedì, e lo studiamo insieme. Vi prometto che ve lo faccio capire. Ci state?»

Sì, ci stavano, avevano voglia di provare.

Curiosità, fiducia, attenzione, pazienza, le doti indispensabili di chi vuole imparare. Andrea capì che quel giorno

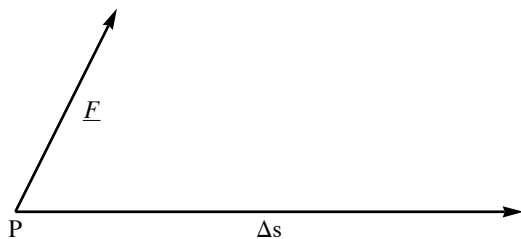
poteva succedere qualcosa di notevole. Cominciò a spiegare:

«Spesso accade di sentire parlare di energia. Ne parlano spesso i telegiornali, ne parlano i politici, perfino i comici. Bene, tutti i personaggi che vi ho elencato hanno una cosa in comune: non sanno di che cosa stanno parlando.»

«Oggi vi racconterò come si definisce il lavoro in Fisica, cioè il fratello gemello dell'energia.»

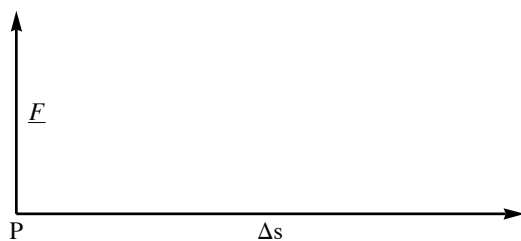
«Cominciamo da un caso molto particolare: una forza rappresentata dal vettore $\underline{F}$ che agisce su un punto materiale P lungo uno spostamento di vettore $\underline{\Delta s}$. In questo caso si definisce lavoro di $\underline{F}$ lungo lo spostamento $\underline{\Delta s}$ il prodotto scalare di $\underline{F}$ per $\underline{\Delta s}$.»

Tracciò un grafico alla lavagna

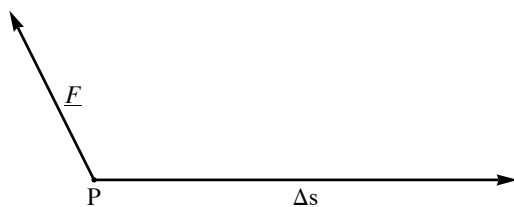


«La definizione è ragionevole perché il prodotto scalare si calcola moltiplicando il modulo della forza per la lunghezza dello spostamento e per il coseno dell'angolo compreso tra i due, quindi prende in considerazione soltanto la componente della forza *nella direzione dello spostamento*. Questo significa che, ad esempio, se la forza è ortogonale allo spostamento il prodotto scalare viene zero.

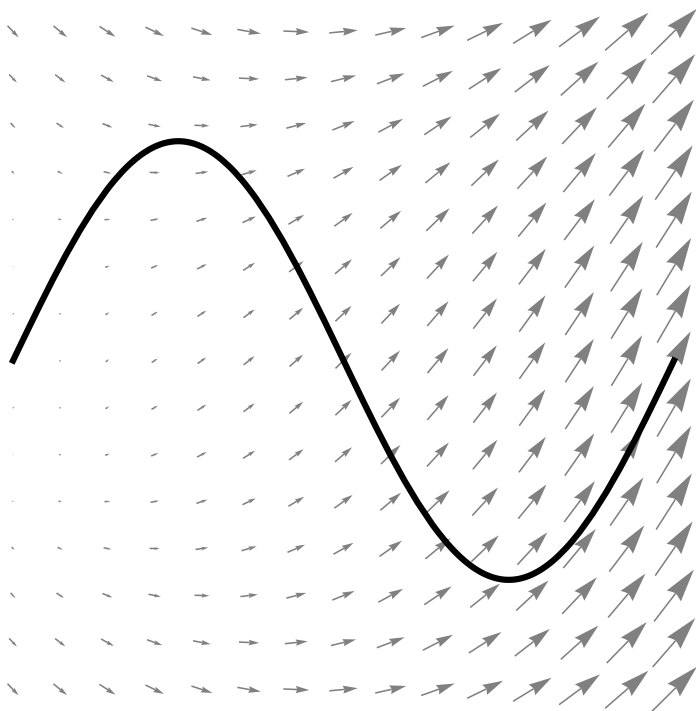
E mi pare giusto: che cosa c'entra, ad esempio, una forza orientata verso il basso con uno spostamento verso destra? È logico aspettarsi che non compia lavoro.



E ancora, se la forza si oppone allo spostamento, cioè ha una componente che va in verso opposto allo spostamento, il prodotto scalare, cioè il lavoro, verrà negativo, ed anche questo mi pare ragionevole»



«Bene, la definizione è accettabile. Peccato che è anche... troppo semplice! Mi spiego: prima di tutto, in Natura non ci si sposta soltanto in linea retta: esistono le curve, e nella definizione che abbiamo fornito si parla soltanto di spostamenti rettilinei. Secondo: seppure accettassimo il fatto che ci si sposta esclusivamente in linea retta, la definizione ha senso soltanto se la forza si mantiene costante lungo l'intero spostamento, e questo, chiaramente, non può essere garantito: in generale la forza cambia in direzione, verso ed intensità da punto a punto.»



«E allora? Ricordate che cosa abbiamo proposto martedì per definire il lavoro anche lungo un arco di curva?»

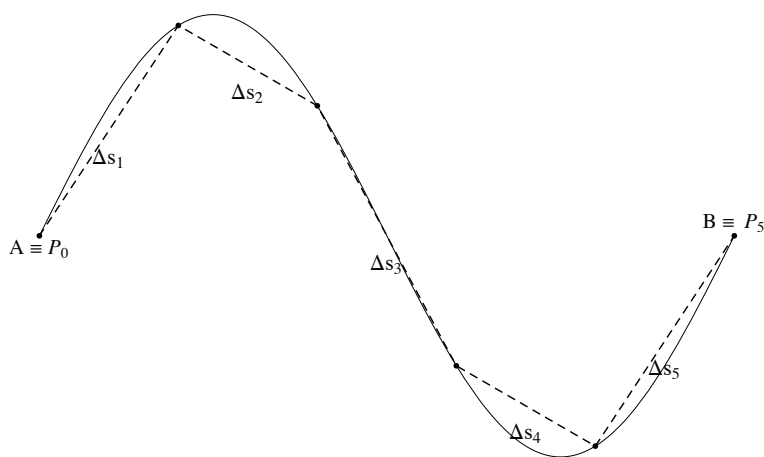
Federico alzò la mano: «Abbiamo disegnato dei segmenti che toccano la curva»

«Più o meno: abbiamo scelto un numero intero n e poi abbiamo disegnato una poligonale inscritta nell'arco. Vi ricordate che cos'è una poligonale? L'abbiamo vista in prima Scientifico, eravate piccoli. . . »

«Sì, è una successione di segmenti che si toccano agli estremi»

«Bene, esattamente così: supponiamo ad esempio di scegliere $n = 5$: ecco una poligonale di sei lati che approssima

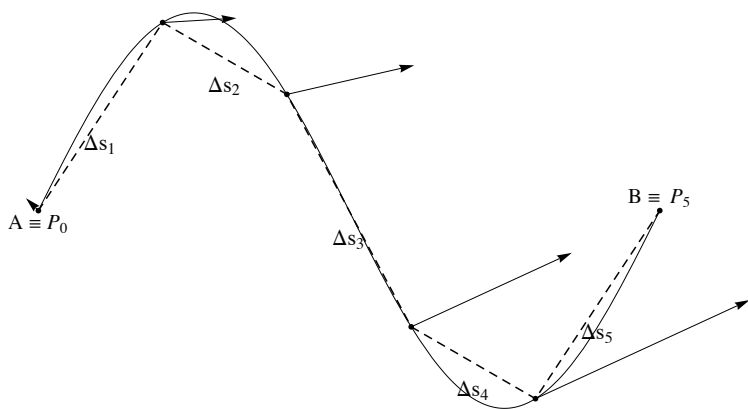
l'arco di curva. A proposito: mi consentite di usare una lettera greca? Ecco, la lettera Γ , si legge «gamma». È la versione maiuscola di questa qui: γ .» Disegnò la poligonale alla lavagna.



«Ho disegnato una poligonale equilatera, vale a dire con tutti i lati della stessa lunghezza. Per la verità, ciò non è necessario: potremmo inscrivere una poligonale con i lati uno diverso dall'altro, e tutto quello che stiamo per dire non cambierebbe di una virgola. Però non ce ne preoccupiamo in questo momento.»

La classe seguiva, il silenzio era totale: buon segno.

«Adesso facciamo così: calcoliamo il lavoro della forza $\underline{F}$ su ogni lato della poligonale. Così facendo, potremo utilizzare la definizione con cui abbiamo iniziato la lezione. Vediamo, ci serve anche il valore della forza in ogni estremo, vero? Eccolo qui:»



«Bello avere un computer che fa i conti (e i disegni) per noi... Come vedete, la forza è diversa in ogni punto. Ok, allora facciamo così: calcoliamo il lavoro su ogni lato della poligonale; diamogli un nome: il lavoro sul lato j -esimo lo indichiamo con L_j ; allora dalla definizione abbiamo:

$$L_j = \underline{F}_j \cdot \underline{\Delta s}_j$$

Facile, no? Nel caso in esame, abbiamo cinque lati, quindi dovremo sommare cinque lavori elementari così calcolati. Allora potremo scrivere:

$$L \approx \sum_{j=1}^5 L_j = \sum_{j=1}^5 \underline{F}_j \cdot \underline{\Delta s}_j$$

«Come vedete, ho usato il simbolo $\approx$, che si legge «circa uguale a ...» Il motivo è molto semplice: nel calcolare il lavoro in questo modo stiamo sicuramente commettendo un errore, e adesso vediamo perché»

«Ci sono due problemi:

Prima di tutto, la poligonale approssima la curva, ma non coincide esattamente con essa.

Secondo: fissate l'attenzione su un lato della poligonale, uno qualunque, ad esempio il secondo, $\underline{\Delta s}_2$. Bene, nel calcolare il lavoro L_2 sul quel lato, abbiamo supposto che la forza fosse costante su di esso, e valesse ovunque $\underline{F}_2$. Supposizione ottimistica: in effetti, come potete vedere (vi ricordo che il grafico è generato da un computer sulla base di una situazione reale), nell'estremo destro P_3 di quello stesso lato la forza assume il valore $\underline{F}_3 \neq \underline{F}_2 \dots$ Insomma, la terza freccia è diversa dalla seconda.

Questo ci fa pensare che, molto probabilmente, lungo ciascun tratto la forza non è necessariamente costante.

Resta così stabilito che nel calcolo di ogni L_j commettiamo un errore. Poi questi valori (approssimati) li sommiamo insieme. C'è da aspettarsi che il risultato sia approssimato. Di qui il simbolo $\approx$.»

«Come risolvere il problema? Ricordate che cosa abbiamo fatto a questo punto?»

Prese fiato. Scrutò gli studenti alla ricerca di qualche segnale di cedimento. Lesse nello sguardo di Luca che qualcosa non andava.

«Luca, adesso è il momento di tenere duro, non mollare»

«Eh lo so prof, ma è pesante ... quaranta minuti sullo stesso argomento, non si vede la fine ... »

«Ci siamo quasi, fidati. Però ricordati una cosa: qualunque cosa tu voglia fare, studiare matematica o filosofia, imparare una lingua straniera, diventare un buon tennista o un grande attore, la differenza la fa questo momento: se non molli, allora prima o poi il risultato arriva. Garantito. Certo, magari a te non sembrerà un risultato esaltante, ma non puoi saperlo finché non lo raggiungi: la soddisfazione è sempre più che proporzionale allo sforzo, su questo non c'è dubbio.»

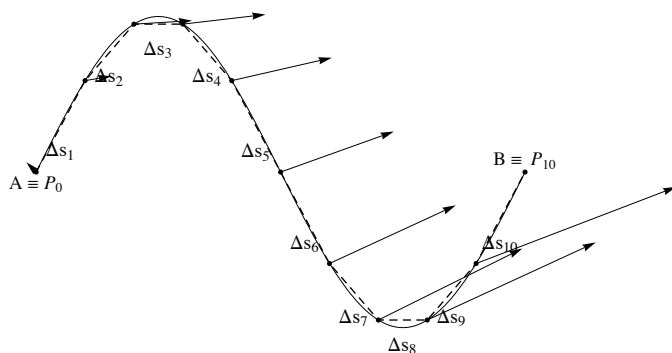
«Un'altra cosa: farei una pausa se potessi, ma ci sono

argomenti che devono essere raccontati in una sola volta, non possiamo fermarci, altrimenti va tutto perduto.»

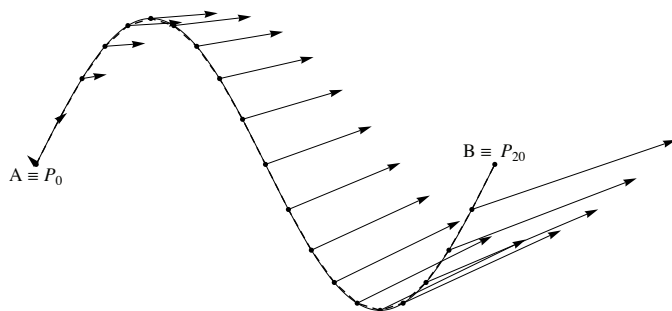
«Allora, la domanda è: che cosa abbiamo fatto per ridurre l'errore?»

Brusio tra gli studenti. Poi due, tre, quattro voci: «Abbiamo aumentato i lati!»

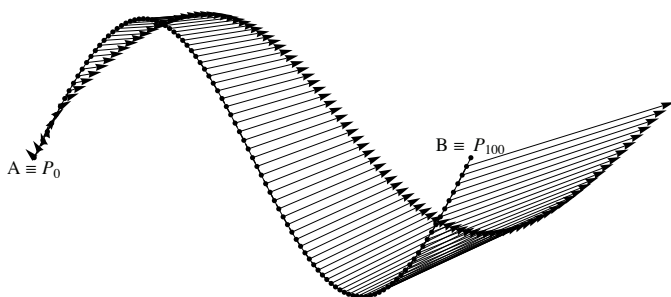
«Esatto! Abbiamo aumentato n , il numero dei lati della poligonale. Per la verità, a me fa più piacere se lo dite in un altro modo: abbiamo accorciato i lati della poligonale, di conseguenza il loro numero n è aumentato. Ad esempio, quando n è 10, il disegno diventa



e per $n = 20$



Proviamo $n = 100$



Quanti segmenti! E, naturalmente, quante frecce!»

«Intuitivamente, è facile dedurre che:

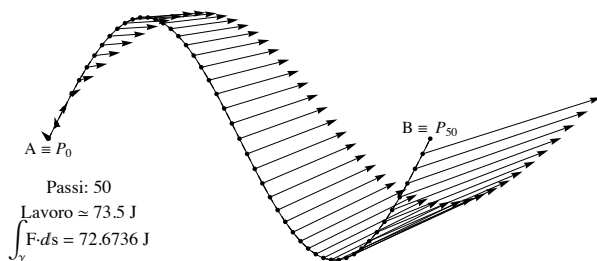
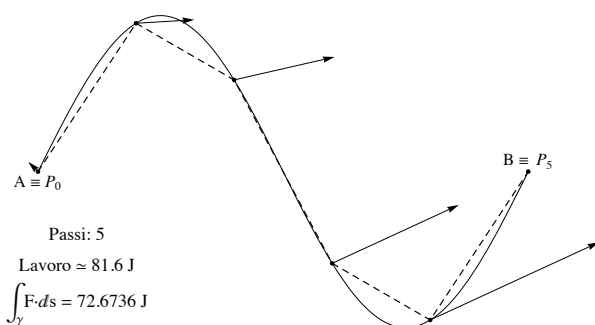
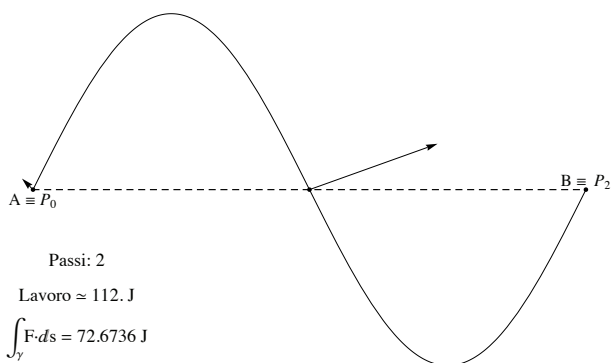
— La poligonale di duecento lati approssima molto meglio la curva

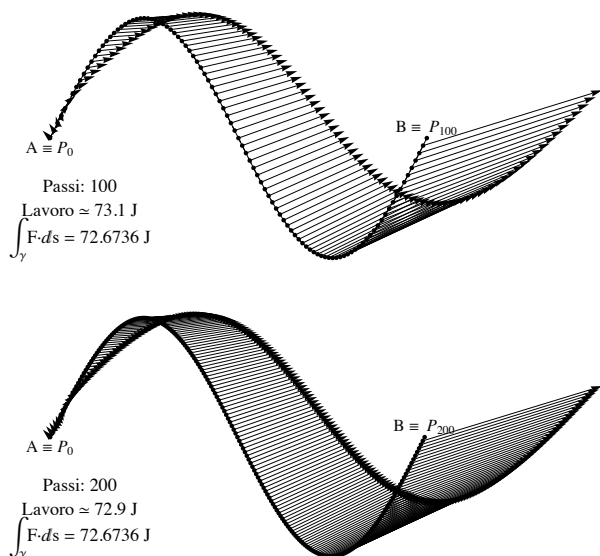
— La forza viene calcolata in duecento punti diversi, quindi anche l'errore del secondo tipo è destinato a migliorare.

Ovviamente, l'ultimo calcolo prevede duecento prodotti ed altrettante somme, ma nell'epoca dei personal computer questo non ci spaventa: per fare i conti c'è il PC...»

«Insomma, ci sembra di poter dire che, man mano che i lati della poligonale si fanno più piccoli, e quindi aumentano in numero, migliora la precisione dei calcoli.»

«Allora proviamo a mettere a confronto il risultato esatto atteso (ma allora ci deve essere il modo per fare questo calcolo!) con le approssimazioni calcolate dal fido computer per valori crescenti di n :





Benissimo, allora proviamo a dire così: se accade che, al diminuire della lunghezza dei lati della poligonale inscritta, l'errore commesso diviene più piccolo di qualunque valore assegnato, allora diremo che il procedimento illustrato definisce correttamente il lavoro lungo la curva. Ci state? Vi torna?»

Mormorio tra i banchi. Alcuni studenti ormai crollati sul posto, ma la maggioranza no: complimenti.

«Allora? Vi convince oppure no?»

Alza la mano Francesco: «Scusi prof, non è che non mi convince, ma mi pare un po' contorto»

«Contorto? In che senso?»

«Nel senso che mi pare che la stiamo facendo un po' lunga: non facciamo prima a dire: definiamo il lavoro come quella somma quando l'errore è zero? Dov'è il problema? C'è bisogno di tutto quel giro di parole?»

Un'obiezione importante, sensata.

Si prese qualche secondo per rispondere, i secondi divennero più di qualcuno. Era la domanda fondamentale: la risposta era no, ma Andrea doveva trovare il modo giusto per giustificarla. Era uno di quei momenti che gli insegnati conoscono molto bene: dai la risposta nel modo giusto e tutti capiranno; dalla nel modo sbagliato e ... puff ... il concetto svanisce, la Matematica lascia il posto alla magia nera, tanto varrebbe dire «abracadabra», il senso sarebbe più o meno lo stesso.

Improvvisamente, mentre Andrea ancora cercava le parole esatte per dire quel no, la voce di Alessandro: «Non può venire l'errore uguale a zero»

Andrea si voltò verso l'autore dell'osservazione. Pensò al voto medio incassato dallo studente negli ultimi due anni: quattro – cinque. Decise di dargli fiducia: se aveva la risposta giusta la giornata poteva diventare trionfale: «Perché Ale? Perché secondo te non può venire zero?»

Intanto Francesco incalzava: «Scusa Ale perché no? Ci metti zero e calcoli il risultato: tanto prima o poi ci arrivi, no?»

Andrea osservava lo scambio: quei due stavano discutendo di Matematica... non di Roma, Lazio o Inter, non di cantanti e veline. No, sembrava un sogno, i due si erano effettivamente accalorati sulla questione più fondamentale dell'Analisi Matematica.

Anche gli altri partecipavano: rapidamente si formarono due fazioni: quelli dello zero e quelli del non-zero.

Fantastico pensò Andrea. Ci siamo. Se adesso Alessandro sa anche dire il perché...

«Ale, dicci perché!»

Alessandro si alzò, percorse i pochi passi dal suo posto alla lavagna, indicò il grafico «Beh, quella è una poligonale, no? Se gli faccio i lati più piccoli sempre una poligonale

rimane, insomma, i lati restano dritti, mica diventano curvi perché li facciamo piccoli piccoli. E allora poligonale era e poligonale rimane, quindi l'errore magari diventa piccolo, ma zero no».

Andrea resistette a stento all'impulso di abbracciarlo. *Perfetto*, pensò tra sé e sé. *Assolutamente perfetto*. Rivolse lo sguardo verso Francesco «Ha ragione lui, sai? Però tra un minuto ho buone notizie anche per te, dammi solo il tempo di arrivarci»

Una rapida ricognizione sul livello di attenzione del gruppo: alcuni avevano inequivocabilmente fuso. Ma tre quarti della classe no, una ventina di studenti erano ancora lì vigili e curiosi. Alcuni volevano sapere perché la poligonale non diventa mai curva. Davide esprime la domanda nel modo più preciso: «Scusi professore, ma dal grafico fatto dal computer con i duecento lati, io non distinguo più qual è la poligonale e qual è la curva. Allora perché ha ragione Alessandro e non Francesco?»

La risposta arrivò da Federica: «se dividi in due un segmento ottieni un altro segmento. Ed ognuno dei due segmenti ottenuti li puoi ancora dividere in segmenti, ma in questo modo non otterrai mai punti singoli: solo altri segmenti, magari piccoli, ma sempre segmenti. Ed i lati della poligonale quello sono: segmenti»

«Esatto! È proprio così: brava! Chiaro per tutti?»

La fazione dell'errore uguale a zero ammise la sconfitta, dopo tutto si avvicinavano le dieci, e la relativa campanella. Ma Andrea aveva in serbo il colpo di scena finale:

«Un momento: so che manca poco all'intervallo, però chi credeva nello zero non deve sentirsi totalmente sconfitto: vedete, quello che è successo oggi riproduce un dibattito che nella storia della Matematica è durato decenni: alcuni sostenevano che alla fine viene zero, e allora ha senso scrivere

$$\text{errore} = 0$$

Altri, invece, ragionando come Alessandro e Federica, continuavano a dire che questo non può accadere, quindi in ogni caso

$$\text{errore} \neq 0$$

«Abbiamo stabilito che, a rigore, è giusta la seconda. Però, a chi la pensa come Francesco rimane una consolazione, anzi molto di più.»

«Sapete, in tanti hanno pensato che la possibilità di rendere una quantità piccola a piacere agendo su un'altra quantità sia straordinariamente interessante, e che meriti un nome ed un simbolo. E allora l'hanno inventato:»

$$\lim_{||\delta|| \rightarrow 0} \text{errore} = 0$$

Che si legge così: «Limite dell'errore al tendere a zero della lunghezza di ciascun lato uguale a zero.»

«Complimenti ragazzi, oggi vi siete costruiti la nozione di limite. Non è poco. Adesso andatevi a riposare, ve lo siete meritato»

L'integrale di campagna

«Se Isaac Newton tentasse di sostenere un esame di Analisi Matematica presso una qualunque università contemporanea, molto probabilmente verrebbe bocciato».

Questa fu l'affermazione con cui il prof decise di stupire quel giorno gli alunni della seconda A. Ne ricavò sguardi incuriositi e sorpresi.

«Newton?»

«Quello delle leggi?»

«Proprio lui.»

«Ma lei ci ha detto che Newton ha inventato l'integrale.»

«E anche la derivata.»

«Sì, proprio lui.»

«E allora com'è possibile scusi? L'inventore dell'integrale bocciato in Analisi Matematica?»

«Beh sapete, quando il prof all'esame fa una domanda si aspetta una certa risposta, ed ho come il sospetto che il povero Newton non saprebbe dare la risposta giusta.»

«Possibile?»

«Sicuro. Il concetto di integrale, così come lo vedeva Newton — sì, lui lo vedeva, aveva un modo molto geometrico di ragionare — era il nonno di quello che studiamo noi. O se preferite il cugino di campagna, molto più rustico, immediato, privo di tante sofisticazioni.»

«Più facile?»

«Più facile magari no, però forse più intuitivo, immediato...»

«E allora perché non ce lo spiega, visto che è intuitivo?»

«Già, e visto che *si vede*, come dice lei...»

Ad una provocazione del genere non si rimane insensibili, ed infatti Andrea accettò la sfida: «Ok, è andata, vi racconto l'integrale in secondo scientifico, perché no?»

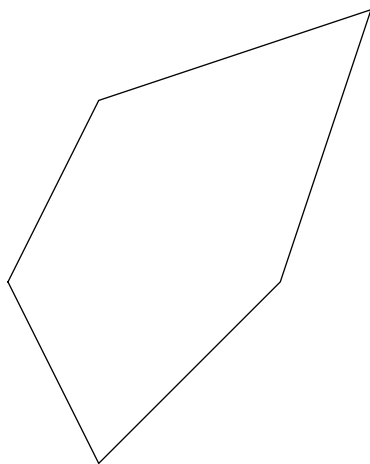
«Allora vediamo, a questo punto dell'anno, voi sapete come calcolare l'area di una qualunque figura geometrica, a patto che sia limitata e che la sua frontiera, il suo contorno, sia costituita da segmenti. Ci siamo?»

La classe rispose affermativamente.

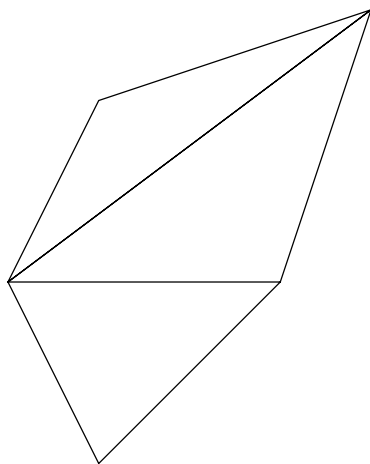
«Bene, tanto per ribadire il concetto, sappiamo che ogni figura limitata a contorno rettilineo, costituito di un numero finito di segmenti, può essere scomposta in triangoli. E siccome sappiamo calcolare l'area del triangolo, male che vada dividiamo tutto in triangoli, calcoliamo le aree di ogni triangolo e sommiamo. Vi torna?»

Sì, la classe rispose che era ok.

Andò alla lavagna e fece un disegno per illustrare meglio il concetto



«Ecco, questa figura risponde ai requisiti, per calcolare la sua area possiamo dividerla in triangoli così:



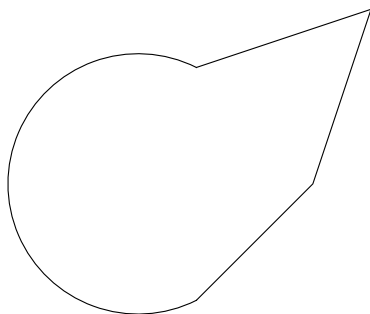
Di ognuno di questi triangoli si può calcolare l'area, ovviamente a patto di conoscere le dimensioni dei lati, questo è ovvio. Si usa il teorema di Erone, quello che fornisce la

misura S dell'area di un triangolo a partire dalle misure a , b , c dei suoi lati In tal caso il problema è completamente risolto con la formula

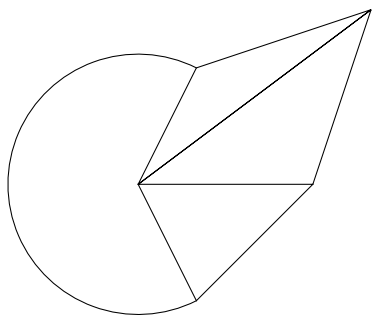
$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dove con $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ si indica il semiperimetro del triangolo»

«Ma che cosa succede se la figura ha contorno mistilineo, se il suo perimetro è costituito non solo da segmenti, ma anche da qualche linea curva?» ancora un disegno alla lavagna



«Anche in questo caso, possiamo dividere in triangoli le porzioni a contorno rettilineo, ma per quel settore circolare che completa la figura sulla sinistra c'è poco da fare...»



«Insomma, le figure a contorno curvilineo possono rovinare la festa, quindi occorre trovare un modo di misurare l'area anche in questi casi»

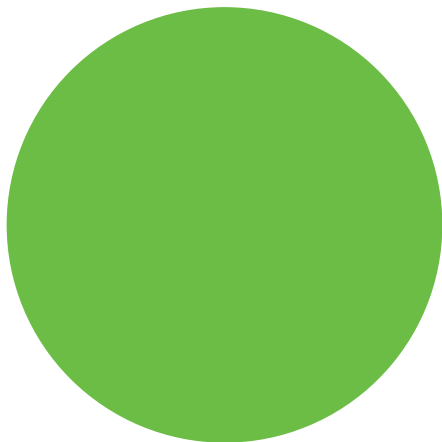
«Concentriamoci su una bella circonferenza di raggio 1: tutti voi sapete che l'area del cerchio è data da πR^2 , dove π è pigreco, poco più di 3,14, ed R è il raggio della circonferenza. Ma chi vi ha mai dimostrato che viene così?»

«Ecco, oggi noi non dimostreremo che viene così, però daremo una definizione dell'area che ci consentirà, se facciamo bene i conti, di vedere uscir fuori il famoso π .»

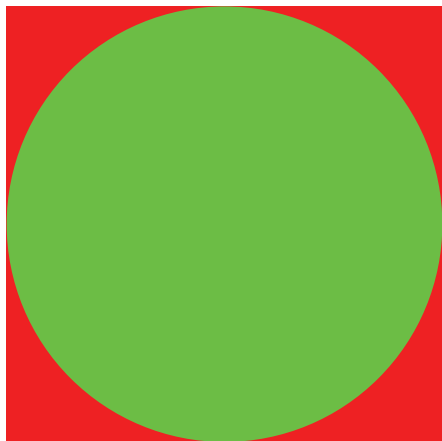
«Per far questo, dovremo abbandonare buona parte delle conoscenze accumulate in questi anni di scuola (so che per alcuni dei presenti sarà un'operazione particolarmente facile)»

«Invece, dovremo provare a ragionare come il vostro fratellino, o la vostra sorellina di sei anni»

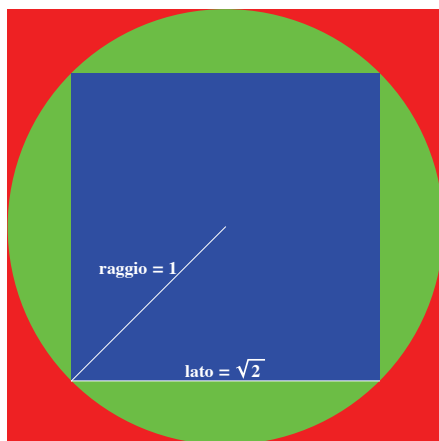
«Allora vediamo, vogliamo trovare A , l'area di un cerchio di raggio uno, come questo»



«Vi dispiace se, tanto per fare mente locale, ci metto intorno un quadrato rosso?»



«E se adesso ci metto dentro un quadrato blu?»

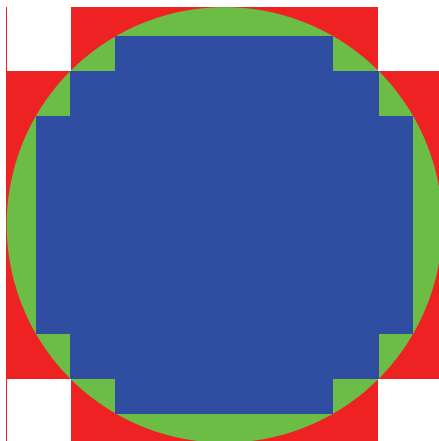


«Adesso diciamo una cosa ovvia: l'area del quadrato blu, s_1 , è minore di quella del cerchio verde, A , che a sua volta è minore di quella del quadrato rosso, S_1 »

$$s_1 < A < S_1$$

«Ma il quadrato rosso ha area $S_1^2 = 4$, quello blu (di lato $\sqrt{2}$) ha area $\sqrt{2}^2 = 2$, quindi adesso sappiamo che l'area del cerchio verde ha un valore compreso tra 2 e 4.»

«Ovviamente non è un gran risultato, però possiamo migliorarlo: se ad esempio togliamo alcuni rettangoli alla zona rossa, ed aggiungiamo rettangoli a coprire le zone verdi, otterremo



Facciamo due conti: al quadrato blu abbiamo aggiunto quattro rettangoli per un'area complessiva pari a

$$\frac{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} \approx 0.6356744903915641$$

All'esterno, invece, abbiamo tolto quattro quadrati, ognuno di area $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ per un totale di

$$4 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \approx 0.34314575050762$$

Possiamo quindi aggiornare le somme: per la figura blu abbiamo

$$s_2 = s_1 + 0.6356744903915641$$

pari a circa 2.63567, mentre per la figura rossa abbiamo

$$S_2 = S_1 - 0.3431457505076$$

che è circa uguale a 3.65685.»

«Ovviamente potremo scrivere

$$s_1 < s_2 < A < S_2 < S_1$$

ed abbiamo due alternative: la prima, continuare ad aggiungere rettangoli dentro e a togliere rettangoli fuori, fare i disegni, calcolare le aree, e metterle in ordine; la seconda è usare la logica e capire come va a finire con un po' di fantasia (ma neppure poi tanta)»

«E come va a finire?»

«Vediamo, ovviamente, ogni volta che aggiungo rettangoli all'interno, le somme piccole aumenteranno; allo stesso modo, ogni volta che toglierò rettangoli da fuori, le somme grandi diminuiranno. Ok?»

«Ma allora risulta:

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq A \leq S_n \leq \dots \leq S_2 \leq S_1$$

e osservo un fatto: al crescere di n , le somme s non diminuiscono, le somme S non aumentano»

«Osservo anche che le s sono approssimazioni per difetto di A , mentre le S lo sono per eccesso. Inoltre, posso definire la quantità»

$$\Delta_n = S_n - s_n$$

«Ora, più la quantità Δ_n è piccola, migliore è l'approssimazione con cui stiamo calcolando l'area cercata. A questo punto appare ragionevole definire *misurabile* una figura per la quale sia possibile, continuando ad aggiungere rettangoli dentro e a toglierli da fuori, rendere questa quantità Δ_n piccola quanto si vuole.»

«Nel caso del cerchio, questo metodo ci darà un'approssimazione di π con un numero arbitrario di cifre decimali»

«Ah una piccola nota a margine: questa storia del ‘rendere tale quantità piccola quanto voglio a condizione che. . .’ è talmente frequente che i Matematici si sono abituati a scriverla in una maniera standardizzata, una cosa del tipo»

per ogni $\epsilon > 0$ esiste una costruzione (tipo quella spiegata qui sopra) che rende $\Delta < \epsilon$

«Vale la pena ricordare questo modo di ragionare, perché lo incontreremo tante volte nei prossimi anni: il segreto per non incartarsi è tenere a mente un semplicissimo principio: si tratta di un modo ragionevole di dare certe definizioni. Con questo voglio dire che se una definizione di questo genere non vi suona bene, non vi sembra ragionevole, allora è evidente che non avete la minima idea di ciò di cui state parlando, e conviene tornare a studiare dal principio»

«Scusi prof» era la voce di Federico, dal centro

«Sì»

«Ma che bisogno c'è?»

«In che senso?»

«Nel senso che lei ci ha detto: la figura è misurabile se a forza di mettere rettangoli dentro e togliere rettangoli da fuori le aree grandi e le aree piccole si avvicinano sempre più. Giusto?»

«Più o meno sì. Una sola correzione: io ho detto che definisco misurabile una figura per cui succede quella cosa lì, non che lo è. La differenza può sembrare piccola, ma è abbastanza importante»

«Ok, comunque è chiaro che la cosa che ci ha chiesto vale per tutte le figure, allora che bisogno c'è di fare tutto quel discorso?» Federico aveva colto un punto fondamentale.

«Vedi Federico, io sono d'accordo con te: l'intuito, le nostre esperienze comuni, ci dicono che tutte le figure che conosciamo rispondono ai requisiti, per cui non si capisce bene perché uno debba complicarsi la vita e fare quel giro

di parole. Però, i Matematici sono strani personaggi. Dopo aver formulato un'ipotesi, un'idea, si divertono a trovare casi in cui quello che hanno appena raccontato non funziona, i cosiddetti contro esempi. Questi individui, i Matematici professionisti, sono cacciatori di casi particolari, in sostanza si tratta di personaggi pedanti e pignoli, ma a fin di bene, e adesso cercherò di spiegarvi perché»

«Allora, pensate a quando comprate un accessorio per il vostro computer. Ad esempio una webcam. Vi aspettate di arrivare a casa, collegare il cavo e cominciare a parlare con i vostri amici, vero?»

«Bene, se questo accade è perché i produttori di computer e quelli di webcam si sono messi d'accordo su alcuni standard, per cui basta acquistare accessori compatibili e tutto funzionerà (almeno in teoria) ok?»

«Sì, ok, e quindi?» la classe era perplessa.

«E quindi... e quindi pensate un po', la matematica produce e regala (non vende, pensate, ma regala, ecco perché i matematici non diventano ricchi), strumenti per misurare, descrivere, modellare, rappresentare la realtà. Avete presente i DVD?»

Ovviamente sì, tutti avevano presente i DVD.

«Bene, per memorizzare sul dischetto il video digitale a costi ragionevoli occorre comprimere quel video, in modo che occupi meno spazio sul DVD. Questo viene fatto utilizzando un preciso metodo matematico. Non è un mistero che questo metodo, questo standard, venga utilizzato milioni di volte al giorno, non solo quando vedete un DVD, ma anche nei telefonini, nella trasmissione del segnale della TV satellitare. Immaginate se non ci fosse l'assoluta certezza sul funzionamento di quel metodo.»

L'esempio aveva funzionato, i ragazzi si rendevano conto perfettamente.

«Ecco perché i matematici, quando sfornano un metodo, una definizione, uno standard, si pongono poi migliaia di domande: Funzionerà sempre? Potrebbe creare problemi? Esistono casi in cui andrà in crisi o darà risultati inaspettati? In un certo senso, i Matematici sono i veri inventori del Controllo di Qualità!»

«Sì prof, ma dove stanno le figure geometriche che non si comportano come abbiamo detto prima?»

«Insomma, mettiamo le cose in ordine: quello che abbiamo illustrato è un metodo ragionevole per definire l'area di una figura piana a contorno curvilineo. In breve, le figure rotonde.»

«Il metodo, come abbiamo visto, consiste nel disegnare rettangoli dentro e fuori ed andare per approssimazioni successive»

«Arrivati in fondo, ci siamo chiesti: funzionerà per ogni figura?»

«A quel punto Federico ha protestato perché a lui sembra ovvio che funzionerà per ogni figura»

«Mettiamola così: Federico ha ragione, se prendiamo in considerazione le figure piane alle quali siamo abituati, quelle con cui lavoriamo di solito. Ma il matematico deve fare il suo Controllo di Qualità, perché non sa se fra cento anni, da qualche parte, qualcuno avrà voglia di applicare questo metodo di calcolo dell'area a figure a cui non avevamo pensato. Ecco che nasce l'esigenza di dire chiaramente in quali condizioni il metodo funziona. In fondo è come scrivere una nota nel libretto di istruzioni: *questo metodo fornisce un buon risultato a condizione che le aree calcolate per eccesso si avvicinino quanto si vuole alle aree calcolate per difetto*. A questo punto siamo a posto: se rispettiamo i requisiti, il metodo funzionerà!»

«Sì prof, ma perché ci sono dubbi? Insomma, dove stan-

no le figure per cui non succede questo fatto delle aree dentro e fuori che aumentano e diminuiscono?»

«Già, dove stanno? Beh, per esempio questo problema se lo pose un matematico italiano, un tale Peano, uno veramente bravo, diciamo calcisticamente parlando un Roberto Baggio»

«Beh allora proprio bravo» fece Alessandro

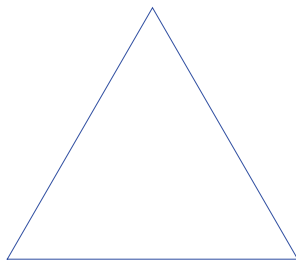
«Sì, proprio bravo. Ma adesso voi vorrete sapere come è fatta questa figura geometrica di Peano, anche nota come fiocco di neve di Koch, per la quale non vale il discorso che abbiamo fatto...»

«In effetti...disse Federico»

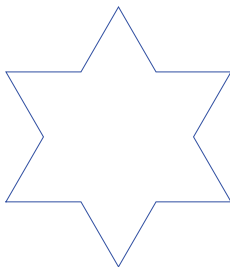
«Ecco...non la posso disegnare»

«E che è, vietata ai minori?»

«No, non è vietata, solo che è definita in un modo un po' strano, ecco il primo passo:



il secondo...



...concentriamo l'attenzione su un lato:



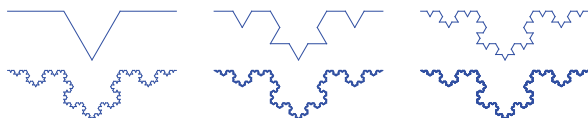
ecco come si trasforma:



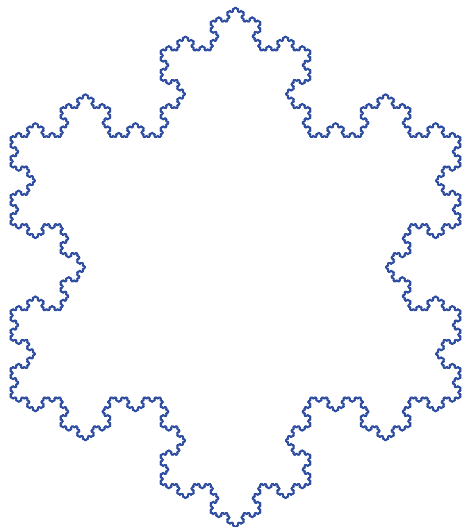
...e prosegue ...



...altre tre iterazioni ...»



«Capita l'antifona? Si va avanti così, ad ogni passo si prende ogni lato e gli si fa la punta, e così via. Ecco la figura che ne deriva dopo qualche iterazione (ma si può proseguire finché se ne ha voglia)»



«Ok prof, strana è strana, ma il discorso dei rettangoli dentro e rettangoli fuori si può sempre fare, no?»

«No, non si può: il procedimento non si ferma mai, ad ogni passo la figura si modifica, quindi diventa piuttosto difficile applicare il metodo»

«Questo lo ha fatto apposta!»

«Esatto, è fatto apposta: è un controesempio: il Controllo di Qualità del matematico!»

«Allora è vero che i matematici sono matti» esclamò Federico.

«In un certo senso sì, però, se ti danno un metodo con il manuale delle istruzioni, puoi stare certo che funzionerà. E ti faccio notare che tanti aspetti della tua vita sono affidati ogni giorno al Controllo di Qualità dei matematici: il funzionamento dell'automobile che ti trasporta, la rete dei semafori che regola il traffico, la stabilità dell'edificio che ci ospita, la possibilità di comunicare tramite cellulare con chi

vuoi, la sicurezza delle condutture del gas e dell'acqua, la rete elettrica. . . devo proseguire?»

«No, abbiamo capito. . . Basta che non ce lo chieda in un compito in classe, però. . .»

«Va bene, mettiamoci d'accordo: voi mi promettete di ricordare sempre che c'è un motivo se il matematico dà le sue definizioni con quella pignoleria, in cambio io prometto di non mettere queste stramberie nei vostri compiti in classe. Siamo d'accordo?»

«Ok, d'accordo»

«Benissimo ragazzi. . . è un piacere fare affari con voi: per la prossima volta prendete la carta millimetrata e cercate di tirarmi fuori il valore di π almeno fino alla seconda cifra decimale col metodo che vi ho raccontato. Ah, per vostra informazione, se qualcuno volesse spingersi un po' più in là,

$$\pi = 3.1415926535897932385 \dots$$

e se siete bravi la prossima volta vi porto un bel libro. Il titolo è

$$\pi$$

e nelle sue circa quattrocento pagine non contiene altro che le prime seicentomila cifre di pigreco. Interessa?» Federico esplose: «E vabbè, ma allora siete proprio matti, non c'è rimedio.»

Il giorno dopo: il cugino dell'integrale di campagna

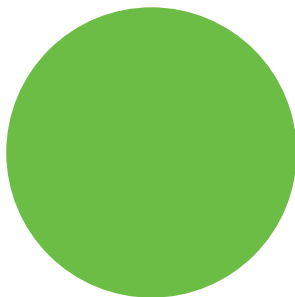
«Sapevate che l'integrale di campagna ha un cugino?»

Ovviamente no, la II Scientifico A ignorava completamente l'esistenza di tale nuovo personaggio, e gli sguardi degli studenti erano lì a confermarlo.

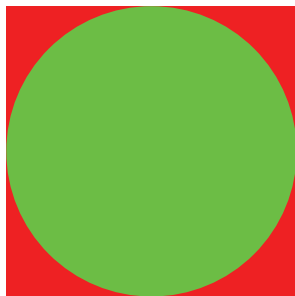
«Si tratta di un tipo sveglio, sportivo, ama il gioco d'azzardo, un frequentatore di casinò...»

La classe rumoreggiava.

«Prometto che vi piacerà. Cominciamo dal solito cerchio di raggio uno:»



«Ed anche stavolta lo mettiamo dentro un quadrato di lato due:»



«Benissimo, adesso facciamo cadere a pioggia un certo quantitativo di punti in questo quadrato. In modo completamente casuale!»

«Allora, pensate a due contatori: uno, lo chiamiamo Q , si incrementa di uno ogni volta che aggiungiamo un nuovo punto; l'altro lo chiamiamo C , e si incrementa soltanto quando il punto cade nella zona verde. Capito tutto?»

Dalla classe sguardi abbastanza rassicuranti.

«Ok, è già finito: facciamo il rapporto $R = \frac{C}{Q}$: man mano che il numero di punti di fa grande (molto grande: ce ne vogliono decine o centinaia di migliaia), questo numero R approssimerà sempre meglio il rapporto fra l'area del cerchio e quella del quadrato. Quindi anche in questo caso, alla fine dovrebbe venirti fuori π . Si chiama *metodo Montecarlo*, ed il nome è proprio azzeccato...»

«E certo» lo interruppe Paolo,»perché è un po' come puntare alla roulette, no? Se ti esce il numero giusto hai vinto»

«Già,» fece Andrea»più o meno è così»

»Scusi prof, secondo me non funziona»

Era Lavinia che aveva parlato, e di solito non era tipo da sprecare fiato

«Ah sì? E perché?»

«Beh, scusi, se io tutti i punti li faccio cadere nella zona rossa alla fine il rapporto verrà uno, e allora, se vale quello che ci ha detto lei, p dovrebbe essere uguale a quattro...»

«Esattamente Lavinia hai centrato il punto fondamentale: chi ci dà i punti casuali?»

«Quindi ho ragione?»

«Quindi hai detto una cosa importante Lavi, pensa che un mio amico ci fece una tesi di laurea sulla tua domanda. Una bellissima tesi»

«E allora? Non funziona?»

«Funziona ragionevolmente bene, ma se il computer che deve generare i punti casuali li genera male, allora succede quello che hai detto tu: vengono risultati a caso»

«E come si fa ad essere sicuri dei punti del computer?»

«Altra ottima domanda» disse Andrea girandosi verso Alessandro.»Esistono dei test che il programma che genera i numeri deve superare, e poi c'è gente che studia notte e

giorno, tipo quel mio amico che vi dicevo, per trovare metodi sempre più sicuri» per generare numeri casuali»

«Che noia» disse Lavinia

«Sono d'accordo, però è molto utile...»

«È uguale a quello di prima»

La voce era quella di Sara; Andrea si voltò, interdetto

«Come? in che senso?»

«È uguale a quello che ci ha spiegato prima, quello dei rettangoli dentro e fuori, tranne il fatto che se il computer mette male i punti non viene, ma se il computer mette i punti in maniera ordinata, secondo me è la stessa cosa»

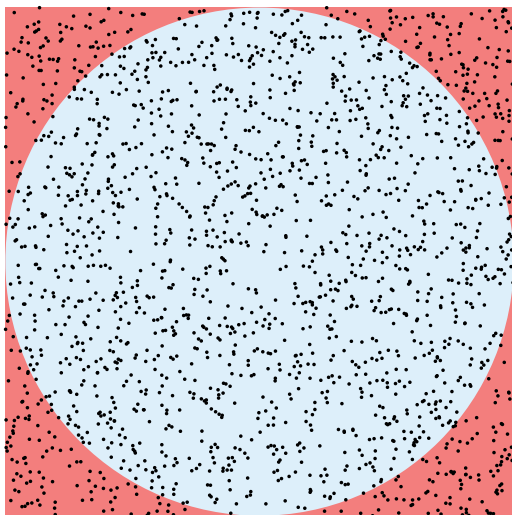
«Potresti avere ragione, sai spiegarmi perché?»

«No, non lo so, è solo una sensazione...»

«Un'ottima sensazione, Sara» disse Andrea, e intanto annotò mentalmente qualcosa da dire ai suoi compagni di corso un po' troppo appassionati di assiomatizzazione, razionalizzazione, o, come amava dire lui, *complicatizzazione* della matematica a danno dei poveri studenti.

«Fantasia! Intuito! Passione! Solo così ti può piacere talmente tanto da cercare gli assiomi, la coerenza, i principi...»

«Non ti preoccupare Sara, non lo so spiegare nemmeno io, ma sospetto che tu abbia ragione, e per oggi questo ci basta»



Giacomo Faser, scienziato

Andrea controllò per la quarta volta, tanto per essere sicuro di non aver immaginato tutto. No, niente da fare, seconda pagina in basso, ecco l'equazione dell'onda sinusoidale:

$$y = \sin(kx + \omega t + \varphi)$$

ed ecco la freccina che indicava la lettera greca ϕ ed alla fine della freccina, in bella grafia femminile, ecco, puntuale, la didascalia:

$$\varphi = \text{Costante di Faser}$$

Costante di Faser eh? Rimuginava fra se e se il prof.

La mattina dopo, in IV scientifico, fatto l'appello, si spostò davanti alla lavagna, prese il gesso e scrisse solennemente:

Giacomo Faser

«Oggi parleremo di questo signore, uno scienziato italiano attivo tra gli anni dieci e gli anni sessanta del ventesimo secolo. . . »

Raccontò di come questo grande studioso avesse teorizzato praticamente in tutte le aree dello scibile umano, riferì

anche di un Nobel sfiorato, di collaborazioni con riviste scientifiche; intanto invitò gli alunni a cercare su Internet, cosa che fu fatta immediatamente, dal momento che si trovavano in aula di Informatica. Incredibilmente, Google scovò un tale Giacomo Fauser, un chimico novarese vissuto tra il 1892 ed il 1971, scopritore di un metodo per la sintesi dell'ammoniaca a partire dall'azoto atmosferico. Fu Federico a fare la scoperta, e a mostrarla orgoglioso ai compagni indicando il monitor.

Il prof colse immediatamente la palla al balzo: «E questo è solo uno dei suoi tanti successi! La grafia riportata da Google è quella più giusta, alla francese, ma poi il cognome fu italianizzato in Faser e tutti lo chiamavano così»

Ogni tanto, di sfuggita, lanciava un'occhiata a Giorgia, l'autrice del compito incriminato, che osservava tranquilla, ignara di quanto stava per accadere.

«E pensate» proseguì Andrea, ormai inarrestabile, «che Faser era anche un grande appassionato di fantascienza: lavorò alla sceneggiatura di alcuni film e serie televisive, fra cui la più nota è Star Trek, la conoscete?» La conoscevano.

«Bene, ricordate come si chiamano le armi che usa l'Enterprise?»

«Ma certo! Il faser!» disse Federico, anticipando di misura un altro paio di appassionati.

«Bravo! E così il cognome del buon Giacomo subì una nuova variazione: da Faser a Phaser, perché gli americani lo preferivano così».

Grande attenzione da parte della classe, alcuni prendevano appunti, due o tre con le mani alzate.

«Faser», incalzò Andrea, «diventò grande amico del capitano Kirk, vabbé, dell'attore, ci siamo capiti, poi fu chiamato da Lucas, per Guerre Stellari, e fu lui a pensare per primo

alla spada laser, che infatti si doveva chiamare spada faser, ma laser suonava meglio».

«Tornando in ambito strettamente scientifico, inventò il maser, cercate su Google o Wikipedia prego...»

Cercarono e trovarono: «Ecco il maser! Dice che è Amplificazione di Microonde tramite Emissione Stimolata di Radiazioni, però qui parla di Charles Hard Townes, J. P. Gordon, e H. J. Zeiger alla Columbia University nel 1953, non nomina Faser!»

«Eh già, succede, per esempio successe anche a Meucci, lui inventò il telefono, ma Bell si prese il merito. Però vi assicuro che fu Giacomo Faser a pensare per primo alle microonde!»

Convinti cenni di assenso dalla classe.

«Infatti,» continuò il prof, «il campo in cui il nostro Giacomo dette il meglio di sé è sicuramente lo studio delle onde. Ma per questo, lascerò la parola alla nostra Giorgia, che sicuramente ne sa di più. Allora, Giorgia, come hai saputo della famosa costante di Faser?»

Passò idealmente la palla all'alunna, rimanendo in sorridente attesa.

«Ah, beh, allora...» incertezza dall'altra parte. «Beh, è la costante no?»

«Sì, sì, ma Faser, come ti è venuto in mente Faser?»

«Eeehhh... mah...»

«Te lo dico io come ti è venuto in mente il *peraltro inesistente* Giacomo Faser: hai chiesto aiuto a Francesco che occupa il banco dietro al tuo, e lui ti ha sussurrato: *costante di fase* e tu hai scritto: *costante di Faser*. E così finisce l'avventura del povero Giacomo Faser, scienziato. Peccato, mi ero già affezionato»

Giorgia restò immobile per qualche momento, Federico ebbe il coraggio di parlare «Ma scusi prof, che si è inventato

tutto? E pure Google ha manomesso?»

«No, il Giacomo Fauser trovato da Google è una sorprendente coincidenza, invece la storia di Star Trek e tutto il resto me la sono proprio inventata, carina no?»

Sguardi esterrefatti dalla platea.

«Ve l'ho detto mille volte che chiedere suggerimenti senza esercitare un sano senso critico espone a brutte figure, no? Ed ecco l'esempio pratico. Da oggi in poi lo chiameremo effetto Faser, spero almeno che vi serva da insegnamento».

Andrea riprese la lezione. Al termine, uscendo dall'aula, Federico si soffermò davanti alla lavagna, dove ancora campeggiava la scritta.

Guardò i suoi appunti: l'azoto, l'ammoniaca, Star Trek, Guerre Stellari, le microonde, la costante. . . Sollevò lo sguardo verso il prof.

Scosse la testa pensando qualcosa di irriferribile; uscì lentamente.

Trent'anni dopo

Il titolo vuol dire trent'anni dopo Leblon, dopo la serata a Rio de Janeiro in casa del Professor Nachbin, in cui era stata enunciata da Fulvio l'idea di organizzare un'Antologia di brani Matematici.

Le motivazioni che Fulvio aveva allora erano bastate per aggregare intorno all'idea numerosi personaggi importanti, non solo nel campo delle matematiche, ma anche delle discipline umanistiche.

Così Fulvio, tornato a Roma, stese un progetto sull'argomento e lo propose agli organi competenti del Ministero.

Fu un miracolo che la ricerca non fu cestinata, perché Fulvio non faceva parte degli storici della matematica, ma proprio per questa ragione gli vennero accordati fondi veramente esigui.

Se è così, decise Fulvio, non potrò strafare. E così si accordò per portare avanti l'idea con un collega, Antonio d'Augenti, ora amico, professore di Filosofia della Scienza a Losanna.

Ne sono nati due lavori Dalla magia del Numero alla codificazione normativa e Fondamenti del pensiero di Cartesio, pubblicati negli Atti dell'Accademia delle Scienze e delle Lettere di Modena, negli anni '83-'84. Il primo tratta la matematica Greca, Indiana, Medio-orientale e Orientale dall'e-

tà di Pitagora al '500, il secondo si occupa essenzialmente di Cartesio. Il primo è stato impiegato alla MIT come supporto per un corso di Storia della Matematica.

E quindi c'è stata un'investitura ufficiale, anche se coi pochi soldi avuti come budget, il secondo lavoro ha dovuto essere assai più stringato del primo. E l'investitura ha avuto almeno due significati:

1. la Matematica si è allineata con le Lettere, cioè ha avuto il riconoscimento di una sua radice umanistica;
2. la Matematica, attraverso i suoi Autori, si è collocata nel tempo, cioè nella storia.

Con questo, almeno dal punto di vista di Fulvio e Nino, l'aspetto ipotetico-deduttivo e in generale quello più strettamente formale poteva essere in qualche modo mitigato dall'aspetto storico e antologico: in altri termini si poteva dire di essere usciti dal uno stretto legame con un tipo di esposizione autoreferente ed essersi portati verso un linguaggio semanticamente più ampio, adatto, e questo non è poco, alla diffusione dei contenuti nella direzione di un pubblico assai più ampio, ancorché meno specializzato.

È giusto, pensava Fulvio. Come per l'Italiano vengono insegnati vari aspetti: l'ortografia, la grammatica, la sintassi, la lettura di brani d'Autore e poi la composizione, la storia della letteratura con la relativa critica letteraria, così è naturale che la stessa cosa si possa pensare fattibile per la Matematica. L'ortografia corrisponde alla scrittura dei numeri; la grammatica alle operazioni, al calcolo; la sintassi corrisponde ai legami tra le parti, come dire alle equazioni e disequazioni, ai sistemi, che hanno più elementi di struttura collegati da sintagmi come l'uguaglianza e le disuguaglianze...; e quindi ecco la funzione dell'Antologia di brani Matematici, come lettura dei passi d'Autore, e infine il libro di

testo ovvero il manuale universitario come un compendio di storia della letteratura e di critica.

In questo senso, in particolare, può nascere l'idea che, come nelle lettere la critica scaturisca dalla lettura del testo, così la validazione della consistenza di un enunciato, vale a dire una dimostrazione, possa nascere in modo analogo dall'analisi di un testo: cioè possa essere legata direttamente alla storia. E, rovesciando, come sarebbe aberrante studiare la letteratura solo nei manuali dei critici senza accedere alla lettura diretta dei brani, sarebbe assolutamente inopportuno legare la conoscenza della matematica al solo manuale e alla critica saltando a piè pari il contatto con gli Autori: questa cosa accrediterebbe maggiormente il critico rispetto all'Autore, cioè alla persona che ha scoperto una verità matematica. Niente di più mistificatorio. Con tutto il rispetto, anche per Andrea e Fulvio, noi ci fidiamo di Newton o di Leibniz più che di noi stessi.

Trent'anni dopo, dunque, ecco che l'idea di un'Antologia di Matematica, ovvero semplicemente la rilettura dei testi originali degli Autori, trova motivazioni aggiuntive ed esce con forza rinnovata.

Ma trent'anni dopo è maturato anche un altro evento epocale: la diffusione dei computer e della comunicazione. Con la comunicazione un risultato trovato oggi a Roma, istantaneamente è a Tokyo piuttosto che a Chicago o Alberta. Col computer, ovvero coi più sofisticati pacchetti di software matematico, la parte strettamente numerica, cioè quantitativa, di un calcolo può essere del tutto demandata al mezzo tecnologico elettronico (ovvero quantistico). E questo non è un fatto meramente computazionale, ma investe aspetti concettuali complessivi.

Per intenderci, si debba calcolare, ad esempio, l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

Comodissimo e pulito, per carità, procedere per il tramite del teorema di Torricelli Barrow, ovvero

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

Il risultato è pulito perché, oltre al teorema, sono noti in modo esatto i valori del coseno nei due estremi d'integrazione. Perché, se si dovesse calcolare, invece, l'integrale

$$\int_0^1 \sin x \, dx$$

Col teorema di Torricelli Barrow si troverebbe, come già visto prima,

$$\int_0^1 \sin x \, dx = [-\cos x]_0^1 = -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1$$

Ora o ci si accontenta del risultato formale

$$1 - \cos 1$$

Oppure si deve calcolare *numericamente*, cioè tramite software (in altri termini in modo approssimato, anche se con l'approssimazione che si vuole) il valore $\cos 1$.

In queste condizioni allora, non sarebbe più conveniente calcolare direttamente via software (per esempio con la regola dei rettangoli o dei trapezi, insomma in altri termini in modo approssimato, *anche se con l'approssimazione che si vuole*) proprio l'integrale, saltando a piè pari il teorema di Torricelli Barrow?

Come si vede il discrimine tra teoria e metodo applicativo si assottiglia alquanto.

Sarebbe ragionevole allora, specialmente per quei profili formativi che non prevedono specializzazioni di tipo matematico, proporre un percorso che

1. alleggerisca gli aspetti formali sostituendoli con contenuti più concettuali e culturali (storici, progettuali, applicativi);
2. accentui l'uso del calcolatore per quanto attiene agli aspetti quantitativi.

Ne risulterebbe uno studio meno astratto e, in qualche misura, spersonalizzato, più discorsivo e controllabile in senso storico e biografico. In altre parole il fatto di avvicinarsi alle opere dei matematici, darebbe una misura percettibile del valore dei contenuti di verità delle loro scoperte, sulla base dell'attendibilità dei loro nomi e del complesso della loro opera.

L'uso del computer e di pacchetti di software matematico aggiornato alleggerirebbe l'impegno e l'incertezza del risultato numerico, garantendo sia la correttezza del risultato, sia il grado di aderenza della procedura alle linee di pensiero da cui è derivata.

Per arrivare al risultato si verrebbero in tal modo ad affiancare due percorsi, uno umanistico e concettuale e l'altro più strettamente analitico, tra loro sinergici. Le due procedure sarebbero singolarmente controllabili con agilità, e questo fatto alleggerirebbe il matematico dalla totale responsabilità del risultato.

Questi pensieri che vengono spontanei trent'anni dopo si configurano, mi pare, come una giusta sintesi di quanto si può fare per riuscire a non deludere chi vuole capire la

matematica. Non mancano spunti che danno prospettive psicologiche nuove alla materia, suggerimenti programmatici per i formatori — ognuno dei quali, se si pone il problema è in grado di trovarli da sé — tipo la professionalità da costruirsi, la mentalità da cambiare, affinché la lezione di Matematica non si concepisca più — da parte di nessuno — come una tassa da subire, ma come un momento da utilizzare per arricchire le proprie capacità, come strumento, insomma, di analisi e comunicazione.

Coi numeri

La pignatta

Un giorno, qualcuno aveva detto ad Andrea: «Impara a riconoscere un pazzo quando ne vedi uno... C'è un sacco da imparare, e, come risultato minimo, ti farà divertire.»

Da sempre era abituato ad ascoltare i buoni consigli, e a seguire tutti gli altri. Imparò molto presto a riconoscere ed amare i tratti inconfondibili della follia, dell'anticonformismo autentico, quello non allineato, allegro, propositivo.

In Fulvio queste caratteristiche erano tutte presenti all'ennesima potenza. Ora, occorre ammettere che anche il Nostro presentava a sua volta diverse manifestazioni della medesima natura; non c'è da stupirsi, quindi, se l'amicizia tra i due cominciò a produrre l'inevitabile.

Fu probabilmente per questo che i due, in un noioso pomeriggio autunnale, sarà stato il 1992, partorirono un compito di Analisi Matematica 2 che resta a tutt'oggi un autentico «cult». Per la verità alla creazione partecipò un terzo individuo, anch'egli appartenente alla stessa specie, tale Roberto.

Il testo di uno dei quesiti recitava più o meno così:

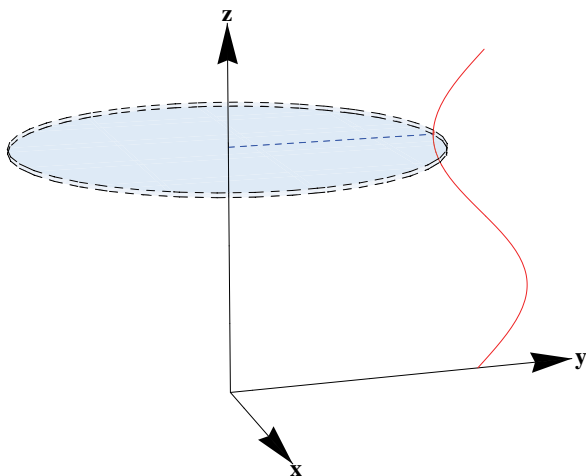
«Calcolare il volume del pentolone in figura, ottenuto facendo ruotare la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sin t + 5 \\ z = t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

attorno all'asse z »

«Il pentolone?» esclamò Andrea.

«Esatto, il pentolone» sorrise Fulvio mostrando un grafico



«Eh già, proprio un pentolone... quasi quasi ci mettiamo anche la bacchetta magica...»

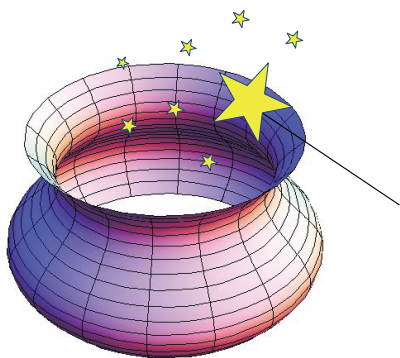
«Mi pare una buona idea...» lo assecondò Fulvio.

«E qualche stellina?» fece eco Roberto.

«Beh certo, se c'è la bacchetta magica, ci stanno bene anche le stelline no?»

I tre esagitati passarono rapidamente dalle parole ai fatti: dopo alcuni minuti l'opera era compiuta.

Il giorno dopo, agli attoniti studenti del corso di laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni il grafico si presentò così:



Agli sguardi interrogativi Fulvio rispose con uno sguardo traducibile in un «embè?» Poi aggiunse:

«Sfregando la bacchetta magica, comparirà il risultato» e si mise seduto dietro la cattedra.

«Oh madonna» pensò fra se e se Andrea, già presagendo che cosa stava per succedere.

Gli studenti cominciarono a lavorare, perlopiù chiedendosi se il matto doveva capitare proprio a loro. Dopo un'oretta uno degli aspiranti ingegneri fu sorpreso mentre, colto da disperazione, sfregava energicamente il disegno della bacchetta magica col dito pollice.

Fulvio lo vide, si alzò e, con studiata, esasperante lentezza, si avvicinò alla lavagna, prese un gesso e scrisse grande

$$51\pi^2$$

«Il risultato è comparso» aggiunse. E tornò a sedersi.

Metà dell'aula esplose in una risata, l'altra metà restò interdetta.

Ingegneri pensò Andrea. Non con intento discriminatorio da matematico un po' snob, per carità, *ma la fantasia per la misera la fantasia!*

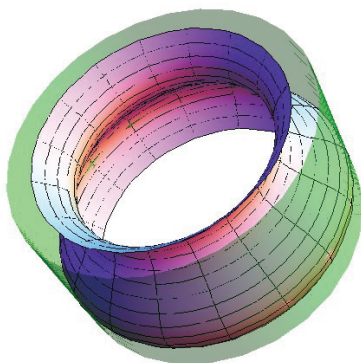
Pensò ad Aristotele, agli Stoici, ai sillogismi. *Se sfregate la bacchetta, allora comparirà il risultato...*

L'implicazione logica si era realizzata davanti agli occhi di tutti: la formula era comparsa sulla lavagna. Ma era successo perché Fulvio l'aveva scritta. Loro invece, collegando la comparsa all'effetto della bacchetta, si aspettavano di vederla comparire per aria, o magari sul proprio foglio, al punto giusto dello svolgimento dell'esercizio. La burla, lo scherzo era sull'equivoco del soggetto a cui riferire l'evento, e stava lì a testimoniare che la logica non può rappresentare il mondo reale, almeno non nella sua interezza. Che cos'è la causalità? Esiste sul serio o è una spiegazione ex-post per dare un filo logico alla nostra percezione dell'universo? E poi, tutto è causale? C'è sempre un meccanismo, una causa determinante dietro a tutto? Quindi tutto è funzione di qualcosa?

Lo scherzo, lo sberleffo irriverente, l'umanità, ecco la lezione da apprendere in quel pomeriggio di autunno del 1992; ecco perché, se incontrate un pazzo, farete bene a seguirlo: ci sarà molto da ridere, e ancora di più da imparare.

Durante la correzione dei compiti, Andrea restò colpito da uno in particolare. L'integrale per trovare il volume era ben impostato e svolto, ma un errore di calcolo conduceva al risultato sbagliato: $102\pi^2$.

Un errore di calcolo? E come ce lo mettiamo questo pentolone di volume $102\pi^2$ dentro ad un cilindro di raggio 6 e altezza 2π , quindi di volume $72\pi^2$?



Il pentolone in quel cilindro ci sta dentro comodo, e verificarlo è facilissimo. . . bastava pensarci. E lo studente evidentemente non ci ha pensato. . . Mancanza di fantasia: di quel faro, linea guida, che al di là del rigore logico ti evita di imboccare strade sbagliate.

Prima della sosta

«Avete riflettuto sulla lezione¹ scorsa?»

«Abbiamo, prof», disse Lavinia.

«Ma tu parli per te?» chiese Andrea.

«No. Ne abbiamo anche parlato tra noi . . . »

«Ah. Questo mi sembra un buon indice.» Non parlottavano tra loro. Stavano aspettando. Andrea sapeva che in classe non è opportuno perdere le occasioni di attenzione. Così continuò:

«A questo punto ci sarebbe da fare

- Un riepilogo
- Alcune precisazioni
- Una domanda

Me ne date l'opportunità?»

«Il riepilogo è necessario? Ne abbiamo già parlato tra di noi. . . »

«Consiste in un paio di domande, essenzialmente . . . »

«Le precisazioni sono domande? E allora serve anche la domanda del punto 3?»

«Eh sì, perché è un riepilogo . . . »

«Ah. Prof, lei ha chiaro quello che ci ha detto?»

¹ F. Bongiorno, *Calcolo I*, Società Editrice Esculapio, Bologna 2002; C. Belingeri, F. Bongiorno, F. Rosati, *Matematica -30*, Aracne editrice, Roma varie edizioni

Andrea fece il suo sorriso sardonico che i ragazzi conoscevano bene e rispose affermativamente, scuotendo appena il capo. Era chiaro ora che il prof sapeva quello che aveva detto. Ed era chiaro che dietro a quel programma che poteva apparire disarticolato, ci doveva essere qualche buona idea. Così, a palma della destra in alto i ragazzi, gli passaron la parola. Andrea cominciò ripetendo le ultime cose su cui aveva appuntato l'attenzione verso la fine della lezione precedente.

«Allora, prima domanda. Il fatto che con un certo procedimento si trovi un numero, ci assicura che quello sia effettivamente il numero che stiamo cercando, cioè l'area della figura? Perché di questo parlavamo la lezione scorsa. Seconda domanda. Riguarda il metodo Montecarlo. Tutte le sequenze di numeri casuali conducono all'area? Le risposte, al tempo di Newton, probabilmente sarebbero state *sì* per la prima, e *sì* anche per la seconda. E ai giorni nostri? Ogni matematico inossidabile direbbe *no* per tutt'e due. Forse questo vi fa capire perché la volta scorsa vi ho detto che se oggi Newton dovesse sostenere un esame di Analisi I, sulle arre e gli integrali insomma, probabilmente sarebbe bocciato.»

«Eh, ma cos'è successo da allora?», fu in sintesi quello che chiesero da più parti.

«Ecco. Questo è l'oggetto del punto 2. Con questo vi do la buona notizia che il punto 1 è finito.»

Brusio. Voleva dire due cose. La prima, menomale che il punto 1 è finito. La seconda, avevamo capito bene che il prof aveva idee precise e anche giuste, che andavano cioè in direzione della nostra curiosità. Infatti la domanda che sollevava il punto 2 stava venendo proprio da loro. Speriamo che sia breve pure il punto 2, sicuramente pensò qualcuno.

«Perché, parlando dell'integrale del tipo di quello di Newton, ho usato le parole *integrale di campagna*? Perché la cam-

pagna è una cosa che cade sotto i nostri sensi: è concreta. Bene anche i matematici al tempo di Newton erano concreti. Cioè cercavano un risultato: un numero, dicendolo in termini matematici. E allora se tu lo trovi aggiungendo e togliendo rettangoli, o lanciando freccette, *punti*, o calcolando una somma infinita, certo che può andar bene. Col requisito, naturalmente, di essere *convvincente*. Questa è la quarta regola del metodo cartesiano – *cogito ergo sum*. E anche la parola *convvincente* era detta in un senso concreto. Come un sinonimo, insomma, della locuzione *fino a prova contraria*. Insomma se poi qualcuno, in seguito, avesse provato che non fosse così, eh vabbé avevano sbagliato.»

«Insomma, prof, ci sta dicendo che Newton ha sbagliato?»

«Sì. Non certo però dal suo punto di vista.»

«Cioè?»

«Inghilterra, Cambridge per lo più, 1645–1727: sono le coordinate spazio-temporali di Isaac Newton, del suo punto di vista, insomma»

«E che vuol dire?»

«Mah! Quello che vi pare. Una cosa molto bella, per esempio, che anche per un matematico era ammesso che si poteva sbagliare. Un principio umano e anche democratico. Senza insomma che per questo dovesse essere messo al rogo. Vabbé lasciamo perdere questo tasto ché ci porterebbe lontano... Insomma la matematica è perfettibile: evolve la visione secondo cui *ciò che non è giusto è sbagliato*, nell'altra, più morbida, ma altrettanto vera se non di più, secondo cui *ogni risultato si può migliorare*. Cosa che va d'accordo col detto popolare *finché c'è vita c'è speranza...*»

«Ma allora anche quello che ci insegnate ora è sbagliato...»

«Abbiamo preferito dire è *migliorabile*. Per due ragio-

ni: prima, per ammettere il progresso con tutte le scoperte annesse e connesse; secondo, per riscattare la ricerca del passato, a cui va riconosciuto il merito di aver compiuto un cammino senza il quale noi non potremmo *andare avanti*.»

«Insomma questo si accorda anche con *sbagliando s'impara*...» disse una voce dal fondo.

«Sì con la precisazione che se si sbaglia a scuola, intanto si prende tre, e poi solo se ci si impegna s'impara».

Naturalmente risero, perché tutti sapevano chi aveva parlato.

«Ragazzi, stiamo andando fuori dal seminato...»

«E certo: con l'integrale di campagna...»

«Ritorniamo a noi. Di quali figure Newton cercava le aree? Già ai suoi tempi era noto con sufficiente precisione il valore di p , essenzialmente ad opera di Archimede. Per questa ragione p è chiamato dai *radical-chic* la *costante ciclotometrica Archimedeana*. Ma per cortesia non me lo fate sentire mai. Mi ricorda un'altra circonlocuzione finto elegante, *cinofallico*, che indica, come potete ben capire se ci riflettete solo un po', qualcosa fatto male.»

«Sempre Archimede aveva fornito le formule per le aree dei sottografici della famiglia di curve x_n , trovando un risultato particolarmente elegante per la parte relativa all'intervallo $[0, 1]$, precisamente $\frac{1}{n+1}$.»

«Si osservi che per $n = 0$ ed $n = 1$, funziona già e fornisce l'area del rettangolo (in $[0, 1]$ quadrato) e del triangolo rettangolo isoscele.»

Premesso ciò, Newton cercava di generalizzare il problema trovando aree di figure mistilinee poste al di sotto di una curva, fino ad una linea orizzontale di riferimento, in cui fosse nota l'ordinata in corrispondenza ad ogni fissata ascissa. Questa linea curva viene detta, lo sapete, grafico di una funzione del tipo $y = f(x)$, e la figura al di sotto di essa,

sottografico. Si tratta, come vedete, di figure piane e piene. Insomma si potrebbe dire, nel senso fornito dall'italiano e non dalla matematica, senza vizi occulti.»

«E ci riuscì?»

«E certo, trovò una formula generale e compatta:

$$\int_a^b f(x) dx$$

ma di difficile uso ai suoi tempi, senza la pratica che su questo tipo di calcolo è stata acquisita ai nostri giorni, sulla base dei risultati di Torricelli, Leibnitz, Cauchy che hanno portato a una formulazione ampia e precisa del teorema fondamentale del calcolo integrale, detto anche di Torricelli Barrow. Devo dirvi per inciso che Barrow c'entra poco con questo risultato, dovuto essenzialmente ad Evangelista Torricelli, contemporaneo di Newton per pochi anni, fino al punto in cui la sorte gli ha assegnato di vivere. (Faenza 1608 – Firenze 1647). Fu allievo e continuatore dell'opera di Galileo nel luogo stesso in cui la ricerca di quel grande aveva iniziato il cammino. Ma spero che chi ha associato il nome di Barrow lo abbia fatto per dovere di generosità verso un generoso. Isaac Barrow fu maestro e Amico di Newton e rinunciò alla sua cattedra di Matematica a Cambridge perché fosse assegnata al suo allievo che considerava più degno. Peccato che sia venuto a mancare presto. Come Torricelli, non fu longevo (Londra 1630 – 1677).»

«Bella tirata prof. Non ci chiederà mica l'applauso alla fine?»

«L'applauso ve lo farò io, se arriverete alla fine in grado di intendere e di volere. Non manca molto. Siamo a tre quarti del secondo punto, e il terzo è brevissimo.»

Per fortuna s'intromise l'intervallo. Quel giorno Andrea non scese in giardino a cercare feedback sulla sua lezione da

parte degli allievi, perché valutò che non si fosse ancora a un momento consuntivo. Preferì perciò lasciare libero il campo allo scambio tra compagni di eventuali elementi propositivi.

Si era fatto un piano. Rimase a passeggiare nel corridoio. Non c'era nessuno. Gli venne in mente: Solo e pensoso i più deserti campi/ vo misurando a passi tardi e lenti/ e gli occhi porto per fuggire intenti/ ove vestigia uman la rena stampi . . . , il famoso sonetto di Petrarca. Era pensoso, infatti. Per completare il discorso sulle aree e i vari strumenti per affrontare i problemi connessi in tutta la loro complessità, una giornata sola non poteva bastare. Allora le strade possibili erano due: semplificare o spezzare. Optò per la seconda ipotesi. Oggi porrò il problema. Lascerò in salamoia per una settimana e poi tornerò a colpire.

Quando tornarono in aula dopo l'intervallo, Andrea riprese.

«Noi ci siamo fermati alla domanda: cos'è successo da quando Newton e compagni proposero il loro integrale di campagna, fino ai giorni nostri?»

«L'integrale ci ha detto prof. L'integrale, no?»

«Magari solo quello. La risposta non è così semplice: Si è sovrapposto a quello del calcolo un problema di analisi critica del concetto di area: Si potrebbe parlare di un accanimento contro le figure piane e piene, quelle onestamente concrete, senza vizi occulti. . . »

«E perché?» chiesero in molti.

«L'appetito vien mangiando, no?»

«No prof. Succede ai golosi», dissero con disgusto gli igienisti e le molte ragazze che seguivano diete ferree.

«Sì, avete ragione. Neanche a me succede infatti. Sapete è un modo di dire, nato forse a seguito gli stenti del dopoguerra. Purtroppo da qualche parte ancora attuale . . . »

«E in che consiste il problema, esattamente?»

«Un problema di *crescita*?»

«Sarebbe?»

«Quando pensava alle figure mistilinee poste al di sotto di una curva, fino ad una linea orizzontale di riferimento, riguardo alle quali si poneva il problema del calcolo delle aree, Newton si riferiva probabilmente a quelle *funzionali al suo metodo di calcolo coi rettangoli*: aggiungendo dall'interno e scalando dall'esterno, come abbiamo visto nel caso del cerchio ...»

«E invece?»

«Qualcuno pensò a figure più complesse. A cui il metodo non si può applicare, o per le quali il suo principio base intuitivo, *spontaneo*, non funziona ...»

«Quale principio base?»

«Quello per cui allargando dall'interno e scalando dall'esterno con un procedimento che si possa iterare quanto si vuole, si arriva a risultati sempre più vicini. E, estrapolando, cioè pensando di poter andare avanti all'infinito, si arriverebbe allo stesso numero ...»

«Ma non si può andare avanti all'infinito, no?»

«Direttamente forse no. Ma, per esempio, se non posto occupare un posto a sedere mettendoci sopra, ci posso tirare il cappello ...»

«Il cappello? Ma che c'entra prof?»

«Una metafora, ragazzi. Pensavo al limite: una proiezione, un *lancio*...»

«Ma è un casino...»

«Ma chi ci pensava a queste figure, Newton?»

«Qualcuna sì probabilmente. Altre no. Di sicuro. Ci hanno pensato molto tempo dopo ...»

«E chi?»

«Gli invidiosi, i rompiscatole, i nemici, i critici del pensiero, quelli col modo di pensare creativo ..., i matti in-

somma, i perditempo. Ma anche quelli portati all'astrazione: i pensatori, gli scienziati. Diciamo meglio: uno o due scienziati. . . »

«Perché uno o due?»

«Perché rispetto agli altri che ho nominato gli scienziati sono pochissimi. . . »

«E di che figure si tratta?»

«Eh. Una parola. Intanto va posto un problema fondamentale: come si possono rappresentare? Formalmente, intendo dire.»

«Eh, intendo dire. . . E che vuol dire? Io vorrei capire», disse dal fondo quello che prima se ne era uscito con sbagliando s'impara.

«Ora hai proprio ragione. Vorresti capire. Certo che sì. Ma cosa è che mancava a Newton, che a voi invece non dovrebbe mancare? . . . »

«L'aereo, prof. Così ci arrivava a razzo!»

«Siete stanchi eh? Vogliamo smettere?»

C'erano in aula orientamenti piuttosto distanti. Ma Andrea pensò di poter delegare qualcosa e fermarsi rapidamente.

«Ok. Una domanda. Quando dico *funzione* voi a che pensate?»

Diverse paia di occhi svuotati.

«Ve lo dico io. Vi ho dato un repertorio di cinque classi di funzioni elementari, che dovrete ricordare:

$$y = x^n \quad n > 0, \text{ algebriche intere}$$

$$y = \frac{1}{x^n} \quad n > 0, \text{ algebriche fratte}$$

$$y = a^x \quad a > 0, \text{ esponenziali}$$

$$y = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1, \text{ logaritmiche}$$

$$y = a \operatorname{sen}(bx) \quad n > 0, \text{ goniometriche}$$

«Le potete trovare su vari libri.»

«Ripassatele bene per la prossima volta. E portate anche, la prossima volta, il libro di Calcolo I, che dovremo guardare alle pagg. 131—152.»

«Per oggi ci fermiamo qui. . . »

«E scusatemi se è poco! . . . » si sentì dal loggione.

La lezione successiva Andrea andò alla cattedra, sedette e rimase in silenzio. In realtà era in attesa.

«Non continua con l'integrale Prof?»

«Avete seguito il consiglio che vi ho dato?»

«Sì prof», e vide molti che mettevano sui banchi i libri che lui aveva suggerito.

«Ma io intendevo dire di andare in biblioteca a vedere . . . »

«Eh. Lì siamo stati . . . »

«E avevano tutte queste copie?»

«Che c'entra. Andando in più biblioteche . . . »

«Quante?»

«Tutte quelle di Roma praticamente . . . »

Andrea probabilmente non riuscì a nascondere del tutto il sorriso di soddisfazione che sentiva dentro di sé. Bene, pensava. Sono riuscito anche a insegnare come arrangiarsi.

«Allora va bene», disse in tono più formale. «Ma non subito.»

«E quando, sennò?»

Evidentemente i ragazzi non avevano dimenticato il gioco del cucuzzaro ... pensò Andrea

«Prima dobbiamo precisare altre cose. Parecchie ...»

«Si tratta?»

«Di figure illimitate, a colabrodo o a pettine, conducendo queste tipologie fino allo stress ...»

«Naturalmente le linee che le delimitano non hanno equazioni che si possono scrivere facilmente ...» azzardò uno.

«Non è vero. Fulvio ha definito una superficie a pettine stressato, semplicemente col nome: pettine di Loreley. La usa in una poesia. La funzione che la delimita si può definire così:

$$f(x) = 0 \text{ fuori dell'intervallo } [0, 3]$$

dove invece vale

$$\begin{cases} 1 & \text{per } x \text{ irrazionale} \\ 2 & \text{per } x \text{ razionale} \end{cases}$$

«Ma poi calcola pure l'area?»

«No. Perché nel senso di Newton e anche nel senso di Cauchy, il pettine di Loreley l'area non ce l'ha»

«E che ci fa allora?»

«Un'inversione, semplicemente...»

«Dello 0?»

«Ma come ti sei scordato che non si può fare?»

«No. Ma allora di che?»

«Della leggenda, la leggenda di Loreley. La conoscete?»

«No. Ce la legge?»

«No. Oggi no.»

«Ma ci faccia almeno capire che cosa inverte ...»

«No. Nemmeno»

«Durissimo oggi, prof. Ma perché?»

«Mi avete fatto una domanda prima. Vi voglio rispondere.»

«Ok! Tanto ha sempre ragione lei . . . »

«Allora funzioni definite in intervalli limitati o illimitati, continue o anche non continue purché dotate di un numero di singolarità finite (o numerabili) hanno l'area. La quale, a sua volta, può avere valore finito o infinito. E in questi casi c'è anche un criterio per calcolare l'area effettivamente.»

«È l'integrale di campagna?»

«Un po' più evoluto. State a sentire. Per calcolare l'area in questi casi si deve riuscire a trovare una successione di superficie con due proprietà:

1. che siano una dentro l'altra (monotonia rispetto all'inclusione);
2. che, andando avanti, raggiungano ogni punto della superficie (invadenza).

Allora si calcolano le aree delle superficie, e il limite della successione delle aree (che esiste perché la successione è monotona) dà proprio l'area della superficie»

«E l'integrale di campagna?»

«Ah, ma la tua è una fissa! L'integrale di campagna nasce da un tipo particolare di successione con queste proprietà che ho detto . . . »

«E se si fa con un'altra successione?»

«Anche nel caso del frattale, la successione costruita da lei aveva le due proprietà, quindi quello strano numero era proprio l'area, no?»

«E nel caso del metodo Montecarlo?»

«Non credete che ci si debba interrogare sull'opportunità di qualche requisito per le sequenze dei numeri casuali?»

«Eh! Quali, per esempio?»

«Troppe domande. Per oggi vi dico che cosa ha invertito Fulvio nella sua poesia. E per il resto, un'altra volta. Se vorrete. Si può fare?»

«E se po' ffà!»

«La leggenda classica germanica, scritta anche da Heine, racconta di una Loreley ammaliatrice che si pettina i capelli biondi e sottili su uno scoglio nel Reno. E siccome lei era bella, i marinai vedendola, non ci capivano più niente e si andavano a sfasciare sullo scoglio. Una sorta di sirena di Ulisse. Una donna malvagia e sanguinaria, che reprime duramente il desiderio di possederla degli uomini di mare (di fiume in questo caso). Invece la Loreley di Fulvio è una ragazza semplice che cerca marito, e allora si mette a cantare con la speranza che qualcuno si fermi e se la porti via. Quei cretini, al contrario, vedendola così bella, perdono la testa e si sfasciano lo stesso sullo scoglio. E lei poverina ci resta male.»

«Fulvio termina coi versi: *nell'aria di brezza/ si fa tristezza*, che sono sostanzialmente uguali a quelli con cui Heine apre la sua celebre versione *io non so cosa possa significare/ che sono così triste.*»

«Heine rappresenta Loreley come un mito, Fulvio invece come una ragazza di campagna – per ricollegarci all'integrale – inoltre Heine fa una domanda, *il perché della tristezza*, e Fulvio ci dà la risposta . . . , a modo suo, naturalmente»

Il Pallone con le zampe

«Stankovic apre a destra per Maicon, l'esterno alza la testa e cerca Ibrahimovic con un lancio lungo, ma lo svedese non riesce a raggiungere il pallone nonostante lo scatto poderoso» Andrea fissò con terrore il teleschermo. Temeva ciò che il commentatore seduto accanto al telecronista avrebbe detto di lì a poco. Puntualmente arrivò la notazione tecnica: «Sì, Ibrahimovic non è riuscito a raggiungere il pallone che dopo il rimbalzo ha preso velocità ...» ... *Sull'erba resa viscida dalla pioggia* completò mentalmente Andrea. Pietà. Ore ed ore di Fisica buttate al vento. Il pallone che accelera perché l'erba è bagnata Uffa.

La mattina dopo entrò in II classico con piglio deciso. Si rivolse ad uno studente in prima fila: «Ieri pioveva, le strade erano bagnate: ti è parso che il tuo motorino prendesse velocità senza che tu accelerassi? Ti è successa una cosa simile?»

La risposta fu che no, non era successo nulla di simile.

«E se appoggi una sedia, *questa* sedia (indicò la cattedra) a terra, guarda, voglio concederti un vantaggio, sull'erba! Anzi, *sull'erba resa viscida dalla pioggia*, beh, ti aspetti forse che la sedia improvvisamente, senza interventi esterni, parta in una qualche direzione?»

Ancora una risposta negativa, ma il sospetto che il prof

non fosse del tutto padrone di sé era palpabile.

«Bene — concluse Andrea — e allora perché un pallone da calcio *prende velocità* cioè *accelera* sull'erba resa viscida dalla pioggia? *Perché?*»

Mentre gli studenti cercavano di frenare le risate, qualcuno provò a protestare: «scusi prof, di che sta parlando?»

«Parlo delle ore che ci metto io a farvi entrare in testa le leggi di Newton ed ai pochi secondi che sono sufficienti ad un telecronista sportivo per confondervi definitivamente le idee. Ecco di che cosa parlo.»

Dalla terza fila arrivò la timida osservazione di Alberto: «Sì ma prof, è vero! Quando gioco a calcio lo vedo anch'io: il pallone prende velocità sull'erba bagnata.»

Andrea lo fulminò con lo sguardo: «Prende velocità? PRENDE VELOCITA'? Ma che cos'è? Star Trek? Ok, ricominciamo da capo. Domanda: Che cosa succede ad un corpo che non è soggetto a forze esterne, oppure è sottoposto ad un insieme di forze esterne a somma nulla?»

La risposta arrivò pronta: «Prosegue nel suo moto rettilineo uniforme»

«La prima legge di Newton, perfetto. Cioè in linea retta e percorrendo spazi uguali in tempi uguali, ci siamo. E che cosa devo fare per cambiare la velocità di un oggetto?»

«Ci vuole una forza»

«Una forza *esterna*. Precisiamo bene: se adesso io vado verso il muro e spingo, che cosa succede?»

«Probabilmente andrà all'indietro»

«Esatto: il muro reagisce con una forza uguale e contraria (terza legge di Newton): io parto all'indietro ed il muro resta fermo (si spera).

Funziona allo stesso modo quando uno cammina: con il piede cerco di spingere il pianeta Terra all'indietro: per la terza legge di Newton la Terra esercita una forza uguale e

contraria su di me; la Terra (che ha molta più massa di me) resta ferma ed io mi sposto in avanti: in ogni caso serve una forza esterna. Ok?»

«Bene, a questo punto io mi chiedo: quali sono le forze che si esercitano sul pallone durante il suo tragitto?»

«La forza di gravità!» fu la prima risposta

«Bene, la forza di gravità, che, faccio notare, è rivolta verso il basso, quindi certamente non ha nulla a che vedere con alcuna variazione di velocità del pallone in senso orizzontale. D'accordo?

Bene, altre forze attive, in grado di incrementare la velocità orizzontale del pallone? Di spingerlo in qualche modo?»

Non c'era traccia di altre forze di quel genere.

«Ok, nessun'altra forza. Chiedo: forse il pallone ha le zampine? Le ali? Ha l'elica per caso? Un motore a reazione?»

Ovviamente un pallone da calcio non è dotato di alcun accessorio di quel genere.

«Bene, allora la domanda che mi pongo è: Come diavolo fa a prendere velocità *sull'erba viscida per la pioggia*? Quale forza magica si esercita su di esso?»

Tutti furono costretti ad ammettere che, effettivamente, questa accelerazione sull'erba bagnata non aveva alcuna giustificazione fisica.

«Vi spiego che cosa succede in realtà. Tutto ha a che fare con un problema di interpretazione, e vi renderete conto molto rapidamente di quanto sia semplice.»

«Tanto per cominciare, il pallone, una volta partito dal piede del calciatore, è soggetto alla forza di gravità (stiamo pensando ad un pallone non rasoterra, quindi avanza in aria). Come sappiamo, il suo moto, in assenza della resistenza dell'aria, sarebbe perfettamente parabolico. Ma l'aria c'è, ed ostacola il moto, quindi la parabola viene un po' accor-

ciata. La resistenza dell'aria aumenta con la velocità, quindi l'accorciamento della parabola è più pronunciato nella fase iniziale del volo, ma da questo punto di vista non ci interessa approfondire ulteriormente la questione.»

«La cosa interessante avviene quando il pallone tocca terra: si tratta di un corpo abbastanza elastico, accumula energia al momento dell'urto col terreno, e per far questo cambia forma, si appiattisce un poco. Poi l'energia elastica viene restituita ed il pallone recupera la sua forma originaria e rimbalza verso l'alto.»

«Adesso vediamo orizzontalmente come si presenta la situazione: come abbiamo già detto, in questa direzione non sono presenti forze attive, quindi il pallone ha una certa velocità orizzontale al momento del rimbalzo. Ma come abbiamo visto, il contatto col terreno appiattisce moderatamente l'attrezzo, che quindi, per un istante, si trova a *strisciare* sull'erba con attrito. Come ben sappiamo, questo strisciamento produce un rallentamento, l'entità del quale dipende dal coefficiente di attrito dinamico tra i due corpi. Bene, il pallone rallenta la sua corsa, orizzontalmente, sia sull'erba asciutta che su quella bagnata. Però su quest'ultima il rallentamento è *meno accentuato*, perché l'erba bagnata ha un coefficiente di attrito dinamico *più basso* di quello dell'erba asciutta. Dal nostro punto di vista, veniamo tratti in inganno e diciamo che ha accelerato sul terreno viscido. In realtà non è così: la verità è che ha frenato meno di quanto fa di solito sull'erba asciutta.»

«E così, le leggi di Newton sono salve.»

«Professore, secondo me il modo di farlo accelerare c'è!»
Andrea guardò l'autore dell'osservazione.

«Ah sì? E come?»

«Ad esempio basta un ciuffo d'erba: il pallone lo urta e prende velocità in una direzione. Una volta ci ho visto

segnare un gol»

«Ok, obiezione accolta: un ciuffo d'erba può far accelerare il pallone, ma precisiamo bene: il rimbalzo diventa un po' più basso e la sfera acquista velocità orizzontale: il ciuffo d'erba non esercita un'azione, quello che in Fisica chiamiamo un lavoro, sul pallone, quindi si determina soltanto un cambio di direzione. Però anche un cambio di direzione è un'accelerazione, quindi da un punto di vista fisico hai ragione»

Silenzio per qualche secondo, poi arrivò la domanda di Paolo: «Scusi ma lei dice che senza azioni dall'esterno il pallone farà quella parabola accorciata, giusto? E allora, quando c'è vento? La parabola si può allungare, ma certe volte il pallone devia verso destra o verso sinistra. L'anno scorso nel campionato qui a scuola un rinvio del portiere è tornato addirittura indietro!»

«Accolta anche questa: il vento spinge il pallone, quindi può variare la sua velocità. Si tratta di una forza attiva a tutti gli effetti, nessun dubbio. Ma, siccome il famoso rimbalzo sul terreno viscido si verifica anche senza vento, il ragionamento principale regge: il pallone non accelera al momento del rimbalzo, ma più semplicemente frena meno di quanto ci aspettassimo.»

Ancora Paolo: «Eppure io ho visto palloni cambiare direzione senza l'azione di una forza esterna...»

Andrea lo guardò con interesse. «Ho capito dove vuoi arrivare: pensi alle punizioni a effetto»

«Esatto, ma anche ai calci d'angolo, a un cross: insomma: quei palloni mica vanno dritti, anzi... E una volta Roberto Carlos ha addirittura tirato un calcio di punizione con la traiettoria ad esse»

«Contro la Francia, me lo ricordo: prima la palla girò verso sinistra, poi, appena superata la barriera, andò

improvvisamente a destra ed entrò in porta»

«Esatto prof! E se non sbaglio lei ci ha detto che per far curvare un oggetto serve una forza laterale applicata continuamente, no?»

«Eh, magari l'avessi detto io. L'ha detto Newton, comunque sì, è così»

«E scusi, dov'è questa forza laterale che compare quando il pallone è in volo? Chi gliela dà?»

«Un'ottima domanda, se volete possiamo parlarne, ma ci vorrà un po' di pazienza: non arriveremo rapidamente alla conclusione, e fra qualche minuto qualcuno potrebbe pensare che in fondo non gliene frega niente di sapere da dove arriva questa misteriosa forza laterale, e allora buonanotte, e non avremmo fatto un buon servizio alla Fisica. Che facciamo?»

«Proviamoci prof, così poi tiriamo le punizioni a effetto pure noi!»

«Non esagerare, sai quante volte ci ho provato io, ma una cosa è sapere come funziona, un'altra è riuscirci. A me per esempio non riesce.»

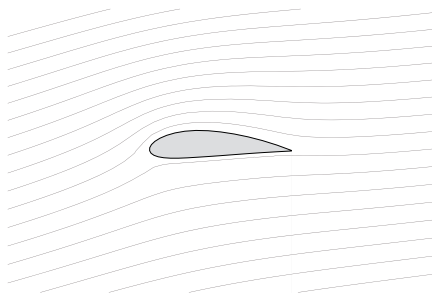
«Allora ce lo spiega?»

«Ok, cominciamo dalle ali degli aerei»

«Ah beh, la prendiamo da vicino»

«Ve l'avevo detto che non era una cosa immediata»

«Vabbè scusi»



«Ecco, questa è (all'incirca) la forma dell'ala di un aereo. Sapete perché la parte superiore viene costruita con quella forma arcuata? Adesso vi faccio vedere. Se facciamo avanzare quest'ala in un mare d'aria, più o meno come succede ad un aereo in volo, allora si verificherà un fatto che, intuitivamente, è abbastanza ragionevole: le molecole d'aria seguono il profilo dell'aria, vengono deviate verso il basso. Nel disegno si nota come il flusso d'aria cambia direzione.»

«Ok prof, e allora?»

«E allora, per spostare il flusso d'aria verso il basso occorre esercitare su di esso un'azione, alla quale corrisponde una reazione che spinge l'ala verso l'alto: terzo principio della dinamica. Se l'ala è attaccata all'aereo (come speriamo) allora l'aereo viene spinto verso l'alto e può volare.»

«Fin qui ci possiamo stare, ma che c'entra col pallone?»

«Pazienza. . . per adesso impariamo perché vola un aereo, che già di per sé è piuttosto interessante. Allora, possiamo dire la stessa cosa in un altro modo: le molecole sopra all'ala esercitano complessivamente una pressione inferiore rispetto a quelle sotto ad essa, e allora l'ala viene spinta verso l'alto con una forza che è proporzionale alla superficie dell'ala, alla velocità dell'aria, sempre rispetto all'ala, e che dipende anche dalla forma dell'ala stessa. Naturalmente non bisogna esagerare con la curvatura, altrimenti il flusso d'aria non è più regolare e si formano vortici, a quel punto si dice che l'ala ha stallato, e non è una bella cosa, perché tende a volare come un mattone, cioè precipita. Scommetto che volete sapere a che punto arriva il pallone.»

La risposta fu che in effetti il trattato di aerodinamica non era poi così attraente.

«Mi rendo conto, però la Fisica è fatta così: spesso tocca sorbirsi un'ora di discorsi noiosi per arrivare ad una conclusione interessante. Però quando ci arrivi scopri che, in fin

dei conti, ne è valsa la pena. Siete ancora con me?»

Risposte positive dal gruppo. «Bene, possiamo proseguire. Il fenomeno che abbiamo raccontato artigianalmente, perché per dimostrarlo rigorosamente ci vogliono fior di calcoli, si chiama effetto Bernoulli: in pratica ci dice che la pressione che un flusso d'aria parallelo ad una superficie esercita su di essa è inversamente proporzionale alla velocità di traslazione del flusso rispetto alla superficie. Questo principio ci servirà tra poco, quando arriverà il pallone da calcio, quindi cercate di memorizzarlo e capirlo a fondo.»

«Arriva il pallone prof?»

«Certo. Ecco il pallone.»



«Che è quello, prof?»

«È una sfera, la schematizzazione fisica di un pallone. Vediamo che cosa succede se il pallone viene calciato colpendolo fuori centro. La stessa cosa succede per la pallina da tennis, da ping pong, da cricket o baseball, e con il pallone da pallavolo. Un po' meno con quello da basket. La domanda è: che cosa succede?»

«Il pallone gira prof»

«Esatto, il pallone gira. Facciamola semplice: diciamo che viene colpito con l'interno del piede destro, così gira in senso antiorario. Tutti d'accordo?»

«Aggiungiamo un piccolo dettaglio: per riuscire a farlo girare, il pallone deve aderire per un istante alla scarpa. Infatti non è la stessa cosa di un colpo centrale: qui si tratta di colpirlo fuori centro, e di imprimergli un movimento rotatorio, quindi un po' d'attrito con la scarpa ci deve essere, altrimenti niente da fare. Ne deriva che prendono il giro più facilmente i palloni più ruvidi»

«Quindi abbiamo un pallone che parte e gira in senso antiorario. Bene, adesso succede una cosa: il fatto che il pallone sia fatto di un materiale non perfettamente liscio, e la presenza di cuciture od altre asperità provoca il formarsi di un piccolo strato d'aria che forma un guscio attorno ad esso. Quindi dobbiamo immaginare il pallone che viaggia in avanti circondato da questo guscio d'aria che gira in senso antiorario insieme ad esso. Ok per tutti?»

Nessun problema

«Bene, non dimentichiamoci, però, che il pallone sta avanzando in un mare d'aria. Ne deriva che si crea intorno ad esso un flusso d'aria, che ha delle caratteristiche piuttosto interessanti. Alla destra del pallone, il flusso in arrivo si mescola con l'aria del guscio. Siccome il pallone, ed il guscio d'aria, stanno girando in senso antiorario, l'aria appartenente al guscio dalla parte destra va contro l'aria che incontra. Inutile dire che l'aria del guscio nella zona alla sinistra del pallone si comporta nella maniera opposta: viaggia nella stessa direzione rispetto al pallone dell'aria che stiamo incontrando, cioè dalla zona anteriore a quella posteriore. Ne deriva che il pallone trova alla sua destra un flusso d'aria perturbato e ricco di vortici, quindi più lento di quello che c'è alla sua sinistra. Che cosa succede applicando il principio di Bernoulli a questa situazione?»

Perplessità in aula.

«Il principio di Bernoulli. Potete rileggerlo qui alla la-

vagna: la pressione che un flusso d'aria parallelo ad una superficie esercita su di essa è inversamente proporzionale alla velocità di traslazione del flusso rispetto alla superficie. Da che parte è più alta la velocità del flusso d'aria rispetto al pallone?»

«A sinistra»

«E allora, che cosa farà il pallone?»

«Viene spinto a sinistra!»

«Come dovevasi dimostrare! Si chiama effetto Magnus, ed è l'applicazione del principio di Bernoulli ai corpi in rotazione in un fluido. Aggiungerei che più è alta la velocità di rotazione del corpo, più l'effetto è pronunciato»

«Tosto professò!»

«Però bello!»

«Già, e questo spiega anche come si fa ad ottenere un tiro con una traiettoria a pallonetto, vale a dire più arcuata, corta. Basta dare al pallone un giro verso l'alto. In effetti non è per niente semplice, servono piedi molto buoni. Nella maggior parte dei casi, si preferisce dare il giro contemporaneamente in senso laterale ed in senso verticale. Ci si riesce facendo girare la palla intorno ad un asse diagonale, ed il risultato è quello di avere un pallonetto ad effetto.»

Andrea era soddisfatto, la spiegazione, per quanto complessa, aveva appassionato la classe, e per giunta i più interessati erano stati due o tre — evidentemente tifosi di calcio — che, solitamente, non erano in prima fila quando si parlava di Fisica.

Fu per questo che l'obiezione di Paolo giunse un po' come un fulmine a ciel sereno: «Scusi Prof . . . »

«Sì?»

«Non vorrei dire, ma a me non sembra che quando Cristiano Ronaldo tira le punizioni il pallone giri proprio come una trottola. Anzi: certe volte si legge pure la marca. . . »

«Ecco, in effetti hai ragione me ne sono accorto anche io» ammise Andrea

«E allora come si spiega che il pallone cambia direzione? Da dove arriva in quel caso la forza esterna?»

«Prima di tutto, mi piace questo modo di analizzare la realtà, cercare di porsi domande, far riferimento alle proprie esperienze. In secondo luogo, diciamo che se occupaste metà del tempo che passate davanti alle partite di calcio a leggere qualche buon libro, probabilmente non fareste un danno.»

«Ok, allora vuoi sapere come può esserci un effetto, cioè una forza esterna che agisce deviando la traiettoria del pallone senza che questo giri su se stesso. Bene, in letteratura non si trova gran che, quindi quella che ti propongo è solo un'ipotesi, una congettura. Non ho una dimostrazione matematica da offrire, quindi non posso avere certezze. Sapete come funziona un tamburo?»

«Ah andiamo bene, prima l'aereo, poi il tamburo. Prof., siamo sfigati noi o 'sta Fisica e la materia dei ragionamenti contorti?»

«Non sono ragionamenti contorti, si tratta di fenomeni simili tra loro, e per farteli capire cerco gli esempi più vicini a te. Tutto qui.»

«Allora, dicevamo, avete presente un tamburo?»

Ovviamente sì, avevano tutti presente un tamburo.

«Ok, allora, c'è questa pelle tesa su un telaio, io la colpisco con una mazza, e che cosa succede? La pelle si deforma, ma, essendo elastica, tende a riprendere la sua forma originaria. Solo che tutto questo non avviene istantaneamente: nel tempo che ci vuole perché la membrana torni allo stato iniziale, le deformazioni viaggiano lungo la superficie, rimbalzano ai bordi, tornano indietro, si sommano a vibrazioni di altro genere (i fisici li chiamano *modi*). Bene, tutto questo avviene con determinate frequenze, cioè un dato numero di

volte al secondo. Per completezza, ricordiamo anche che l'aria che si trova nei pressi della membrana in vibrazione vibra a sua volta con le stesse frequenze; quando questa vibrazione giunge al nostro orecchio, noi la interpretiamo come suono.»

«Ma non divaghiamo: la parte che ci interessa è questa: quando un corpo elastico viene deformato, esso tende a riprendere la sua forma. Ma ci mette un po' di tempo, e intanto le deformazioni si propagano al suo interno sotto forma di onde.»

«Adesso torniamo al pallone e a Cristiano Ronaldo. Avete mai studiato il suo modo di calciare? Colpisce il pallone secco, in un punto preciso, con la parte interna del piede ma lontano dalla caviglia, che mantiene rigida. Il calcio è rapido ed interessa un'area ristretta, inoltre, la rigidità della caviglia consente di ottenere il massimo trasferimento di energia all'attrezzo (altrimenti l'elasticità dei muscoli e dei tendini assorbirebbe parte dell'energia, che andrebbe sprecata). Molta energia in poco tempo in una superficie ristretta del pallone genera una deformazione localizzata e molto accentuata, la quale, come abbiamo visto, si propaga lungo l'intera sfera, sotto forma di onda, mentre questa sta viaggiando verso la porta. Ne deriva che il pallone è deformato, quindi le sue caratteristiche aerodinamiche non sono più simmetriche come quando è a riposo, Credo che questo lo porti a subire ulteriormente l'effetto Bernoulli. Se un calciatore impara a provocare la deformazione giusta, penso che se ne possa ottenere la curvatura desiderata. E questo spiegherebbe anche un'altra cosa: quando quel tipo di tiro non viene eseguito correttamente, il pallone se ne va proprio da un'altra parte, talvolta dritto per dritto, altre volte con un effetto che è ovviamente molto diverso da quello desiderato dal tiratore: la classica palla in tribuna (e fischi del pubblico). Questa sembrerebbe essere una conferma dell'idea. Ripeto, è soltanto

una congettura, gli studi sulla deformazione dei palloni sono recentissimi, si trovano poche pubblicazioni, dal 2007 in poi. C'è da sperare che qualcuno si incuriosisca e ci lavori sopra, così forse sapremo se la congettura è giusta oppure no. Finito. Avete capito?»

«Più o meno... Ronaldo da un calcio al pallone in un punto preciso, quello si abbozza, quindi va storto.»

«Beh Ale, in estrema sintesi più o meno sì... Diciamo che il cosiddetto 'abbozzamento', che io preferisco chiamare *deformazione*, viaggia avanti e indietro a causa dell'elasticità del pallone, che così cambia continuamente forma e, di conseguenza, subisce forze aerodinamiche che ne variano la traiettoria.»

Proseguì con un sorriso «Ai miei tempi c'era un pallone che si chiamava Supertele. Era leggerissimo, e molto elastico. Quei tiri incredibili riuscivano anche a noi che eravamo bambini: con un po' di pratica ottenevi traiettorie pazzesche. Chissà se ci sono ancora in giro quei palloni.»

«Va bene, per oggi abbiamo finito, ma ricordate che questo è il modo di ragionare in Fisica: osservo un fenomeno, mi pongo domande, cerco una spiegazione utilizzando le conoscenze accumulate in tanti secoli, eventualmente faccio supposizioni e verifico che siano coerenti con le osservazioni e mi consentano di formulare previsioni corrette. Quando tutto torna, ho un modello, che utilizza la Matematica come linguaggio. Ma domani o tra un anno un nuovo esperimento potrebbe mettere in discussione la mia congettura, e allora bisognerebbe rimettersi a pensare e tirar fuori un nuovo modello, più accurato e completo. E così via. È la storia della Fisica, e continuerà ad esserlo.»

«Solo un'ultima cosa: la Fisica vi mette in grado di descrivere il mondo che vi circonda e di realizzare modelli per rappresentarlo; vi consente di progettare un ponte od un

palazzo sapendo da prima come si comporterà una volta costruito. La Fisica ci ha portato sulla Luna e ci porterà su Marte e poi ancora più lontano, ci ha dato strumenti di diagnosi e di cura, mezzi di trasporto sempre più affidabili e sicuri, tecnologie per comunicare e per studiare l'universo. Ma c'è una cosa che la Fisica non può darci: i perché fondamentali. Perché due corpi si attraggono? Perché esistono due tipi di cariche elettriche? Perché la luce si comporta in un certo modo? Sono tutte domande alle quali nessuno conosce la risposta: allo stato attuale, i perché fondamentali del funzionamento del cosmo sono ignoti. La matematica, come diceva Galileo, sarà pure il miglior linguaggio che l'Uomo conosca per raccontare l'universo, quindi in questo senso possiamo condividere ciò che egli scrisse nel Saggiatore, ma capire, rispondere ai perché, no, non c'è Matematica o Fisica che tenga, quelli sono ancora sconosciuti.»

«Prof., perché non viene a fare l'allenamento con noi mercoledì qui a scuola? Così proviamo le punizioni come ci ha spiegato!»

Andrea si girò verso Paolo: «Affare fatto, però stiamo attenti alla palma assassina dietro la porta: già ci ho rimesso diversi palloni; dopo tutto, Cristiano Ronaldo lo pagano, a noi invece ci tocca affittare il campo. Un motivo ci sarà, o no?»

Maturità 2008

Il telefono squillò verso le 4, insomma le 16. Faceva caldo, e questo è normale a Roma il 18 giugno. Era Fabio, un vecchio amico di Andrea.

«Ciao prof. Come va?» esordì con malcelata ansia. Dall'altra parte la consueta risposta:

«Bene. Credo. Tu?»

«Mah, diciamo bene, anzi no, ho un problema.»

«E chi non ne ha...» si inserì pronto Andrea.

“No, è che Federica ha fatto la prova di Matematica...” Silenzio dall'altra parte del filo. Non perché Andrea non avesse capito, in effetti la sua era pura crudeltà. Fabio capì che toccava ancora a lui: «Hai presente la maturità? Quella rottura di balle che ancora mi sogno la notte? Beh, Fede ha fatto Matematica stamattina.»

«Ah bene, allora a posto, ostacolo superato, no?»

«No. Insomma, boh, non lo so. Federica è disperata, dice che ha sbagliato tutto, non ci ha capito nulla, insomma, te la posso mandare? Sai, ci tengo, da lei mi aspetto un votone.»

Certo che ti aspetti il votone, mezza sega, me lo ricordo come se fosse ieri: estate millenovecentootantaquattro:

«Trentacinque e due figure... altro che!»

Era un Fabio più magro quello che parlava, un Fabio diciannovenne, e la cifra, espressa nel linguaggio del tresette, in

cui *due figure* fanno quasi un punto intero, ma non proprio, stava ad indicare la ferma volontà del Nostro di impegnarsi nella misura *strettamente indispensabile* a conseguire la votazione minima (trentasei) e con essa l'agognato pezzo di carta. Ironicamente, un quarto di secolo scarso, un matrimonio (con relativo divorzio) e soprattutto la paternità avevano trasformato quel simpatico cialtrone in un intransigente Paladino della Cultura.

Andrea rispose che sì, la poteva mandare, anche subito, tanto non aveva da fare.

Federica arrivò mezz'ora dopo, sguardo vagamente allucinato, grottescamente trascurata come accade a quegli adolescenti che abitualmente studiano poco, ma quando decidono di travestirsi da secchioni preferiscono esagerare. Andrea la fece accomodare davanti alla scrivania di cristallo. Sullo schermo del computer le immagini di un videogioco. La guardò distrattamente. «Avete fatto la guerra o l'esame di maturità?»

«Perché?»

«Mi sembri provata.»

«Professò, nun ce se capiva niente, un panico, io devo prendere almeno 13-14 e mi sa che qui sto lontana...»

«Un panico?»

«Due se so' pure menati.»

«Ah sì?»

«Sì, per i posti.»

«Ah, già, ovvio. Perché organizzate i posti per passarvi il compito, quindi quelli vicini al secchione sono i più ambiti, salvo poi scoprire che vi passate montagne di fregnacce. Conosci l'*effetto Faser*? No? Dopo ti racconto...»

«Vabbè, comunque...» Federica tirò fuori due pagine, le porse ad Andrea «Questo è il compito¹»

¹ Maturità Scientifica 2008 — Testo dello scritto di Matematica.

Andrea prese in mano i due fogli, li posò sulla scrivania, li studiò per qualche minuto.

«Allora, il primo quesito sicuramente l'hai svolto, no?»

Federica si sporse, poi esclamò contenta: «Sì, di quello sono sicura: è il Teorema di Cavalieri.»

«Il Teorema di Cavalieri?»

«Sì, quello ce lo ha detto pure il prof mentre uscivamo: è il teorema delle sezioni dei piani paralleli, no?»

«No, non è un teorema, e comunque mi dispiace per il prof ma non ci siamo. Lascia perdere Cavalieri e concentrati sul quesito: «Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area.» Secondo te è vero?»

«Beh, se lo dice Cavalieri...»

«Lascia stare Cavalieri, pace all'anima sua. Secondo te, 'sta cosa è vera o no?»

«Secondo me?»

«Esatto, secondo te.»

«E io che ne so?»

«No Federica, tu lo sai eccome! Adesso ti faccio vedere»

Prese un foglio bianco, e su di esso tracciò un disegno.

Indicò la figura di sinistra «Che cos'è questo?»

«Un cubo?»

«Esatto, un cubo di lato uno, quindi il volume è uno per uno per uno: viene uno. Ok?»

«Ok.»

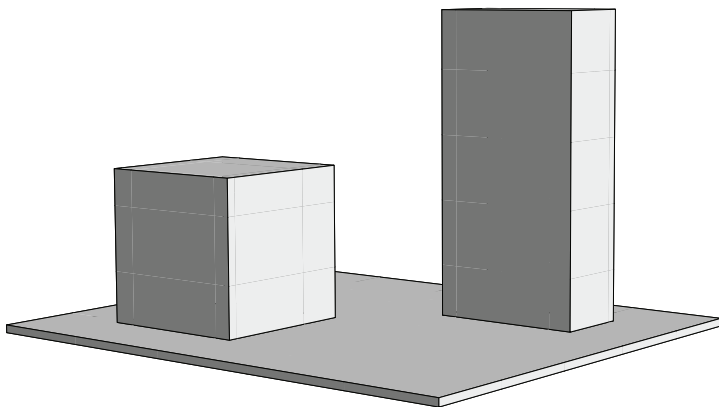
«Bene, adesso il solido a destra: che cos'è?»

«Un parallelogrammo?»

«Facciamo un parallelepipedo, è un solido. La base misura un mezzo per uno, l'altezza è due, quindi il volume è uno per un mezzo per due, cioè uno. Mi segui?»

«Sì, facile.»

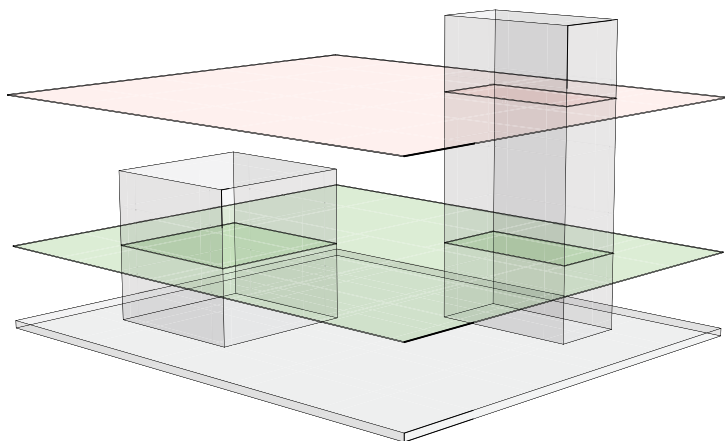
«Ottimo, quindi i due solidi hanno uguale volume. Adesso facciamo sezioni con piani orizzontali. Se mi trovi due sezioni che hanno la stessa area ti faccio una ricarica al cellulare.»



«Da cinquanta euri?»

«Cinquanta euri.»

Federica prese in mano il foglio, provò a tracciare qualche segno, ma presto rinunciò. Sconsolata, lo appoggiò sulla scrivania.



«Cazzo.»

«Che tradotto in italiano significa ‘non ci sono riuscita’, vero?»

«Scusi prof.»

«Ma figurati, insomma, ti sei accorta che ogni sezione orizzontale del parallelepipedo ha area un mezzo, mentre il cubo ha sezioni di area uno fino ad altezza uno, e poi più niente, vero?»

«Già. Cazzo»

«Che traduciamo in ‘Accidenti, bastava ragionarci un paio di minuti’ ...»

«Già»

«Vabbè, niente di grave, hai soltanto invertito la tesi con l’ipotesi... esercizio sbagliato, ma non è morto nessuno, dopotutto....»

«Eh sì, ma il voto....»

«Tanto corregge il prof, no? Magari non se ne accorge...»

«Facciamo un problema?»

«Vuoi fare un problema? Ok, vada per il problema. Vediamo un po'...» Andrea prese l'altro foglio e cominciò a leggere mentalmente.

Dopo un paio di minuti tornò a parlare:

«Dunque vediamo, cominciamo dal secondo problema che ha una bella simmetria geometrica, con implicazioni storiche molto interessanti. Sai, queste cose le studiavano i Greci, in particolare un tizio che si chiamava Ippocrate, ma non quello del giuramento dei medici, un omonimo meno famoso. Si era appassionato a queste figure geometriche che chiamava lunule, perché ricordano le fasi lunari... dunque, il punto 1 dovrebbe venire, vediamo.... due volte pigreco terzi meno radice di tre su quattro.... sì, è così. Viene anche a te?»

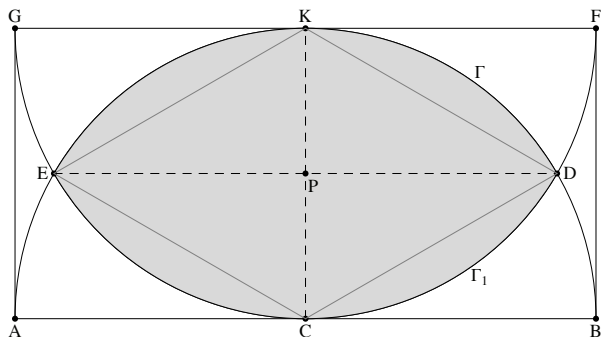
«Eeehhh? E che è? Ha fatto l'integrale a mente?»

«Quale integrale? Qui non c'è nessun integrale»

«E come la calcola l'area senza l'integrale?»

«Boh, l'area del triangolo per esempio è base per altezza diviso due, l'area del cerchio è pigreco erre quadro, quella del...»

«EEEhh vabbè, ma questo non è un triangolo, qui c'è scritto *Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi elle e elleuno*, se non è un integrale questo...»



«Gamma Federica, gamma e gammauno, va bene che non hai fatto il classico, ma qualche lettera greca si può anche imparare, no? E poi com'è il ragionamento? Tu deduci dalla pomposità del testo che ci vuole l'integrale? Cioè, insomma, è il compito di maturità, l'ha scritto il Ministero, come potrei non fare l'integrale e accontentarmi di uno squallido base per altezza?»

«Ma il prof ci ha sempre detto che l'integrale è l'area.»

«Ah allora....»

«Perché non è vero?»

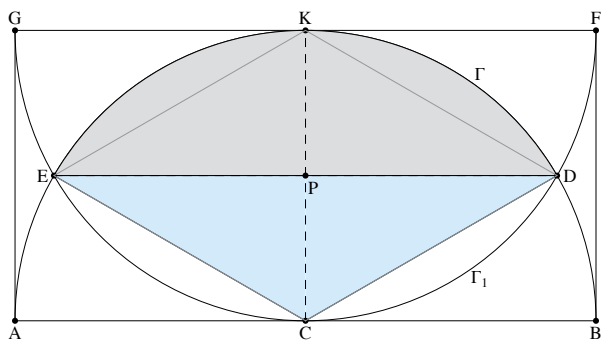
«Beh, detto così, pensa, non è nemmeno vero.... Ma credo proprio che tu abbia capito male. Torniamo a noi. Vuoi sapere perché viene quel risultato?»

«Siamo qui per questo no?»

«Ok, seguimi: come ti ho detto, la figura è simmetrica: usa il segmento ED per dividerla in due metà uguali, la parte di sopra e la parte di sotto, ok?»

«Ok.»

«Benissimo, adesso concentrati su quella parte grigia delimitata dai punti D, K ed E: sarebbe un settore circolare di centro C, se non gli avessero tolto il triangolo CDE, quello celeste, giusto?»



«Uhm Beh, sì.»

«Ok, questo va ripetuto due volte, quindi il risultato è: due volte l'area del settore meno l'area del triangolo. In formula:

$$2(\text{Area}_{\text{sett}} - \text{Area}_{\text{triang}})$$

ci sei?»

«Sì»

«Perfetto, adesso troviamoci le due aree e siamo a posto. Cominciamo dal triangolo: il lato CE vale uno e ce lo dice il testo; ci dice anche CP, che vale un mezzo, la metà di CE, quindi si tratta di un triangolo con angoli di trenta sessanta e novanta gradi: EP vale radice di tre su due, quindi l'area di CPE è

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

e l'area di CDE è il doppio:

$$\text{Area}_{\text{triang}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Per quanto riguarda il settore circolare, visto che l'angolo PCE è di sessanta gradi, l'angolo DCE, che è il doppio, sarà di centoventi, quindi un terzo di un giro completo, che sono trecentosessanta gradi. Se fosse un giro completo sarebbe un cerchio di area pigreco erre quadro, cioè pigreco per uno al quadrato, vale a dire pigreco. Siccome è un terzo di cerchio, l'area viene pigreco terzi:

$$\text{Area}_{\text{sett}} = \frac{\pi}{3}$$

Quindi ecco il risultato che ti ho scritto prima:

$$\text{Area} = 2(\text{Area}_{\text{sett}} - \text{Area}_{\text{triang}}) = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

Facile no?»

«Ecco.»

«Non ‘cazzo’?»

«No, maledizione, si faceva sul serio a mente.»

«Eh già.»

«Però io ho fatto l'integrale, ma mi sa che non è venuto così.»

«Càpita, magari sono venuti un po' di conti. . . »

«Due pagine di conti.»

«Facile sbagliare.»

«Già, facile sbagliare.»

«Non ti preoccupare, l'esame andrà bene.»

«Dice professore?»

«Dico. Sei una ragazza sveglia, poi magari queste cose gliele fai vedere all'orale e prendi qualche punto in più . . . »
Andarono avanti con la correzione del compito: alla fine non era malissimo, si poteva prevedere un dieci quindicesimi, che dopotutto non era da buttare via. Quando Federica se ne fu andata, Andrea chiamò Fabio.

«Allora?»

«Ci siamo salutati adesso, tutto ok.»

«Quindici?»

«Quindici che?»

«Il voto? Quindici?»

«Ah no, direi un po' di meno, sai ci sono alcune imperfezioni Diciamo dieci - undici?»

«Ecco, lo sapevo, un disastro. Tutto quel tempo perso, sempre in giro invece di studiare, ah ma adesso mi sente . . . »

«Fabio, ho detto che va bene.»

«Che cosa va bene se non prende non dico quindici, ma almeno tredici?»

«Va bene perché è sveglia, intelligente, curiosa, perché quando sorride il mondo è più bello, ci sono un mucchio di cose in Federica che vanno bene.»

«Ti sei innamorato?»

«Sì, di mia moglie, vent'anni fa.»

«Scherzavo... insomma me la stai mettendo sulla tenerezza paterna... Federica ha fregato anche te: è la sua specialità, si fa benvolere.»

«No Fabio, è solo che non è colpa sua se non ha capito la matematica. Magari poteva studiare di più, per carità, ma non è tutta colpa sua.»

«E di chi è la colpa? Del professore?»

«Il mio collega? Per carità, non potrei mai.»

«E allora?»

«E allora... Non è colpa sua, nemmeno del collega, sarà colpa del governo, oppure, come diceva Troisi, *d'o' tempo*... Te lo ricordi 'Non Ci Resta Che Piangere'? Sicuramente però non è tutta colpa di Federica, anzi... Prenditela col tempo, col destino, con chi ti pare, ma non con Federica, che ha le sue colpe ma è la meno responsabile.»

«Va bene, ho capito. Senti grazie di tutto, a buon rendere.»

«Figurati, è stato un piacere.»

Dopo aver salutato Fabio, Andrea tornò a guardare i suoi appunti. Certo, se l'integrale è l'area e l'area è l'integrale, se questo è ciò che rimane ad un liceale di uno dei concetti più belli ed interessanti dell'Analisi Matematica, allora non c'è da stupirsi.

Perché allora ci vogliono due pagine di conti per calcolare un'area da due soldi. E poi, vuoi mettere il principio di Cavalieri? Naturalmente accroccato lì malamente e mai vera-

mente capito, così appena è capitata la domandina insidiosa, *zacchete*, ecco la fregatura.

Andrea pensò che Federica aveva qualche giustificazione: dopotutto ci vuole una certa faccia tosta per rispondere in due righe ad un prestigioso Quesito di Maturità ... e poi l'area fatta solo di somme e prodotti, senza integrale ... ma per carità ...

Però, pensò Andrea, la scuola non dovrebbe insegnarti proprio questo, ad avere quella faccia lì? A ragionare con la tua testa, e non con quella di Cavalieri? E poi chi è Cavalieri?

Federica fu promossa alla maturità con novanta. Al compito di Matematica ebbe dodici.

Il prof lamentò qualche errore nel calcolo dell'integrale.

Le fece anche i complimenti per aver correttamente individuato il *Teorema* di Cavalieri.

La Lista della spesa ed altri vettori

«Vi sarà capitato almeno una volta di andare al supermercato a fare la spesa.» Un assunto, un'affermazione più che una domanda. I ragazzi della seconda annuirono più per educazione che per autentica convinzione. Andrea colse l'imbarazzo «No? Beh è lo stesso: mi serve per introdurre un argomento di una certa importanza, quindi diciamo di sì. Non serve proprio l'esperienza diretta, ma più che altro l'idea, e quella, tutti più o meno ce l'avete chiara.»

«Allora, naturalmente ci vuole la lista» Si avvicinò alla lavagna e cominciò a scrivere: 5 Banane, 3 Dadi (per brodo), 6 Carciofi, 2 Arance.

«Ok, diciamo che vogliamo fare i fenomeni e impariamo la lista a memoria. Al ritorno dal super, ecco che cosa tiriamo fuori dalla busta: 2 Arance, 3 Carciofi, 6 Dadi e 5 Banane. È la stessa cosa?»

Risposero che no, non era per niente la stessa cosa.

«Perfetto siamo d'accordo. Possiamo esprimere questo concetto sinteticamente dicendo non possiamo confondere Arance con Banane. Od altro, ovviamente.»

«Bene, e naturalmente non va neppure se riportiamo a casa 10 Arance e 6 Banane: sempre sedici pezzi sono, ma

non nella distribuzione richiesta. Ci state?»

«Vedo che l'argomento vi appassiona, e prima che qualcuno me lo chieda, confermo che stiamo spiegando Matematica. Perché prima di approdare ai libri di testo, i concetti nascono nelle menti degli esseri umani, e spesso sono tratti da esigenze comuni. Poi arrivano i Matematici di professione, li formalizzano, talvolta li complicano un po', altre volte li rendono del tutto incomprensibili od inutili (il più delle volte entrambi). E allora mi sono detto: perché non partire proprio da lì dove il concetto nasce, dalla vita di tutti i giorni? Ed eccoci al supermercato.»

«Non vi vedo convinti. Va bene, allora ecco a voi il primo Passaggio Matematico: diciamo che da adesso in poi faremo a meno di nominare Carciofi, Dadi per brodo e così via, stabilendo una volta per tutte che l'ordine convenzionale è: Arance, Banane, Carciofi, Dadi. In questo modo, per ricordare i quantitativi, basterà memorizzare i numeri 2, 5, 3, 6 in quest'ordine per avere la lista completa. Ovviamente, se sbagliamo ordine, riporteremo a casa la spesa sbagliata. Quindi, una volta fissato l'ordine convenzionale dei prodotti, una lista sarà rappresentata da una n -upla (si legge *ennupla*) ordinata di numeri. Per essere dei veri Matematici, dovrete scriverla così:»

$$\text{Lista} = (2, 5, 3, 6)$$

«E, per motivi che per ora non ci interessano, sarà il caso di chiamarla vettore. Quindi, ricapitolando, abbiamo rappresentato la lista della spesa mediante una n -upla ordinata (nel nostro caso una quaterna ordinata) di numeri.» La classe seguiva con interesse: evidentemente il mix tra everyday life e concettualizzazione simbolica era gradito. Decise di spingersi oltre.

«E adesso, che cosa succede se, mentre siete al supermarket, ricevete una chiamata da casa del tipo: ‘ah scusa, aggiungi per favore due carciofi e togli un’arancia, ok?’ Che si fa in questo caso?»

«Pensateci un attimo: è come chiedere di aggiungere 2 al terzo posto e togliere 1 al primo, vero? Con la simbologia da noi adottata, questo si può fare così:»

$$\text{Nuova Lista} = (2, 5, 3, 6) + (-1, 0, 2, 0) = (1, 5, 5, 6)$$

«quindi acquisteremo un’Arancia, 5 Banane, 5 Carciofi e 6 Dadi. Potete verificare che è corretto. Però attenzione: come al solito, non mescolate Arance con Banane: l’operazione va fatta posizione per posizione, o, come diciamo noi che abbiamo studiato, per componenti. E così abbiamo definito la somma di vettori.»

«Tutti d’accordo o devo fare altri esempi?»

«Beh prof, ma lì che c’è scritto per caso *meno una arancia?*»

«Eh già ...»

«E che cos’è *meno un’arancia?*»

«È il numero di arance da aggiungere ad un’arancia per farne zero. È *l’opposto di un’arancia*»

«Non è di grande aiuto così, sa prof?»

«Diciamo così Jacopo: non è molto naturale pensare a *meno un’arancia*. E infatti i numeri naturali sono quelli positivi, quelli adatti ad esprimere quantità numerabili di oggetti od enti concreti. Tutti gli altri li abbiamo inventati noi perché ci servivano. Quindi accolgo l’obiezione, ma tu in cambio mi lascerai scrivere meno uno ogni tanto?»

«Ok prof, permesso accordato»

«Grazie. Allora se non ci sono altre obiezioni... e vedo che non ce ne sono, è il momento di andare alla cassa. Dobbiamo fare il conto e pagare. Come si fa il conto?»

La risposta arrivò rapidamente: basta moltiplicare il quantitativo di ogni prodotto per il suo prezzo unitario e poi sommare i quattro numeri ottenuti.

«Bene, benissimo. Allora, sempre supponendo di esserci messi d'accordo sull'ordine da seguire, Arance, Banane, Carciofi, Dadi, rappresentiamo in un vettore anche i prezzi in euro. Però concedetemi una cosa: fatemeli mettere in colonna invece che in riga, ok? Poi vi dico perché:

$$\text{Prezzi} = \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,80 \\ 1,10 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$

Ecco, adesso facciamo l'operazione. A tutti gli effetti è una moltiplicazione, però è una moltiplicazione speciale: si applica a due vettori della stessa lunghezza, il primo riga, il secondo colonna, e restituisce come risultato un numero secco: quello che viene chiamato in Matematica uno scalare. Per questo motivo si chiama prodotto scalare.»

$$\text{Totale} = \text{Lista} \cdot \text{Prezzi}$$

«Non vi avevo detto che quel puntino è il simbolo da usare, vero? Ok, adesso lo sapete»

$$\begin{aligned} \text{Totale} &= (1 \quad 5 \quad 5 \quad 6) \cdot \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,80 \\ 1,10 \\ 0,05 \end{pmatrix} = \\ &= 0,30 + 4,00 + 5,50 + 0,30 = 10,10 \text{ euro} \end{aligned}$$

«Ho fatto bene i conti? Come abbiamo stabilito, si tratta di prendere la prima componente del primo vettore e moltiplicarla per la prima del secondo, poi la seconda del primo per la seconda del secondo, la terza del primo per la terza del secondo e così via. Fatto questo si sommano i risultati e si ottiene il totale. Allora viene o no?»

Il risultato fu verificato con successo.

«Non è difficile, vero?»

I ragazzi ammisero che, effettivamente, non era difficile.

«Benissimo. E adesso la cosa si fa interessante: accanto al totale da pagare voglio anche calcolare il peso della spesa. Ovviamente, posso ripetere quanto fatto prima con un vettore diverso: questa volta ogni elemento del vettore Pesi sarà il peso in chilogrammi che corrispondono a ciascun prodotto:»

$$\text{Pesi} = \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,35 \\ 0,45 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$

«e di nuovo, il peso totale sarà:»

$$\begin{aligned} \text{Peso totale} &= (1 \quad 5 \quad 5 \quad 6) \cdot \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,35 \\ 0,45 \\ 0,05 \end{pmatrix} = \\ &= 0,40 + 1,75 + 2,25 + 0,30 = 4,70 \text{ Kg} \end{aligned}$$

«Ora, chi mi impedisce di effettuare questo calcolo in una volta sola, così:»

$$\begin{aligned}
 (\text{Costo} \quad \text{Peso}) &= (1 \quad 5 \quad 5 \quad 6) \cdot \begin{pmatrix} 0,30 & 0,40 \\ 0,80 & 0,35 \\ 1,10 & 0,45 \\ 0,05 & 0,05 \end{pmatrix} = \\
 &= (10,10 \quad 4,70)
 \end{aligned}$$

«È chiaro come abbiamo svolto l'operazione: il vettore riga per la prima colonna ci ha dato il 10,10, lo stesso vettore per la seconda colonna ci ha restituito 4,70» «L'oggetto che vedete al centro, quella tabella a due colonne e quattro righe, si chiama matrice. Quello che avete appena effettuato si chiama prodotto tra vettore e matrice. Non c'è bisogno che vi dica che, affinché questo prodotto si possa calcolare, il numero di componenti del vettore deve essere uguale al numero di righe della matrice» «E adesso l'ultimo sforzo: supponiamo che il supermarket abbia tre clienti (spero per lui ce ne siano di più): Alberto, Beatrice e Carlo. Ok?» «Ok» rispose qualcuno dalla seconda fila. «E ovviamente (l'avevate sospettato) ognuno dei tre ha la sua lista:»

$$\text{Lista A} = (1 \quad 1 \quad 2 \quad 0)$$

$$\text{Lista B} = (2 \quad 0 \quad 0 \quad 10)$$

$$\text{Lista C} = (20 \quad 0 \quad 0 \quad 100)$$

«Vi chiedo: che cosa ci impedisce di fare così:»

$$\text{Liste clienti} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

«E che cosa succede se facciamo la seguente operazione:»

$$\text{Liste clienti} \cdot \begin{pmatrix} 0,30 & 0,40 \\ 0,80 & 0,35 \\ 1,10 & 0,45 \\ 0,05 & 0,05 \end{pmatrix}$$

«Naturalmente dovremo svolgere l'operazione riga per riga; otterremo:»

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,30 & 0,40 \\ 0,80 & 0,35 \\ 1,10 & 0,45 \\ 0,05 & 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,30 & 1,65 \\ 1,10 & 1,30 \\ 11,00 & 13,00 \end{pmatrix}$$

«Che cosa è successo? Abbiamo moltiplicato una matrice 3 per 4 (cioè con tre righe e quattro colonne) per una 4 per 2. Abbiamo ottenuto una matrice 3 per 2. La prima colonna del risultato rappresenta i costi che dovranno sostenere, rispettivamente, Alberto, Beatrice e Carlo. La seconda colonna indica il peso in chilogrammi che ognuno dei tre dovrà portarsi a casa.»

Si girò verso la classe. Tutti svegli, ottimo segno.

«Non ci crederete, ma questa che abbiamo introdotto oggi si chiama Algebra Vettoriale e Matriciale. Ovviamente non finisce qui, ma le operazioni principali sono queste. E, cosa ancora più importante, le abbiamo create a partire da osservazioni concrete: questi enti rappresentano situazioni reali, non teoriche od astratte. Solo un consiglio: quando andate a fare la spesa, non chiedete alla cassa di fare il prodotto scalare: ho visto gente ricoverata al centro di igiene mentale per molto meno»

Il Teorema della Quitandiña

Fulvio prese il gesso e cominciò a scrivere alla lavagna sulla sinistra, mentre diceva,

«Dunque la volta scorsa abbiamo parlato degli operatori differenziali. Vi ho scritto una lavagna di formule ...» e le stava ripetendo in ordine.

Faceva parte del suo modo d'insegnare, l'aveva appreso dal suo Maestro.

«Io a sinistra, nella parte alta, scrivo sempre gli argomenti della lezione precedente, e nella parte bassa quelli della lezione corrente. Perché può succedere a tutti di distrarsi per più di una volta, e poi quando uno torna a seguire si chiede ma che stiamo facendo ... Allora guarda qui e lo vede. Insomma l'obbiettivo di questa pratica è minimalista: che ognuno, insomma, alla fine della lezione possa conservare in mente i titoli di quello di cui si è parlato ...» aveva spiegato una volta.

«Oggi, attenzione, mi servirà mezza lavagna solo per riscrivere le formule», disse Fulvio, «e poi la parte nuova la scriverò qui a destra.»

Si rivolse alla lavagna e continuò.

«Dunque, nel caso di un campo scalare di una variabile

scalare, per una funzione tipo $y = f(x)$, insomma, l'operatore differenziale sostanzialmente è uno solo: la derivata,

$$f'(x), \quad \text{ovvero} \quad \frac{df}{dx}$$

nel caso di un campo scalare di una variabile vettoriale, ovvero di una funzione di più variabili, l'operatore differenziale è il gradiente, cioè il vettore:

$$\text{grad} f(t, u, \dots, w) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial u}, \dots, \frac{\partial f}{\partial w} \right)$$

nel caso di un campo vettoriale, riprendiamo il caso più classico, quello del campo a tre componenti, ognuna funzione di 3 variabili, ovvero:

$$\begin{cases} X = X(x, y, z) \\ Y = Y(x, y, z) \\ Z = Z(x, y, z) \end{cases}$$

in questo caso vi ho detto che gli operatori differenziali sono tre.»

«Lo Jacobiano, che è la matrice

$$J_{X,Y,Z,x,y,z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

la divergenza, che è lo scalare

$$\text{div}(X, Y, Z) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \frac{\partial Z}{\partial z} \right)$$

il rotore, che è un vettore. Esso, in modo simbolico, viene scritto:

$$\text{rot}(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

e, in chiaro:

$$\text{rot}(X, Y, Z) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \hat{k}$$

ok. Oggi vi parlerò del teorema della Quitandiña.»

E scrisse alla lavagna in alto al centro, perché la parte sinistra ormai era bruciata,

Teo Quitandiña

Poi guardò gli studenti e continuò.

«Si tratta di un'estensione, più propriamente, perché voi lo conoscete già per il caso delle funzioni di una variabile...»

«Lo so», aggiunge vedendo gli studenti spaesati, «voi lo conoscerete forse col nome più pomposo di teorema di derivazione delle funzioni composte...»

«Ah!...» si rincuorarono gli allievi.

«Teo Quitandiña è una mia follia. Ora vi spiego. La Quitandiña è una località che sorge sulla strada che da Rio de Janeiro porta verso le montagne di Petropolis e Teresopolis. Petropolis è una cittadina di collina dove d'estate – in Brasile in gennaio, febbraio – andava in vacanza la famiglia imperiale dei Braganza, e prende il nome dagli imperatori don Pedro I e don Pedro II di quell'epoca.»

«Io ci sono stato. All'inizio degli anni '80. Ero relatore a un convegno a Rio de Janeiro, ospite di un amico che allora era «addetto culturale presso l'ambasciata.»

«Ho avuto la sfiga che la mia esposizione fosse proprio nell'ultimo giorno del convegno, un sabato, e perciò, ecco perché ho detto sfiga, non mi sono potuto esimere dall'essere presente a tutte le sedute della settimana, sennò non avrei avuto uditorio per me. Ed ero abbastanza contrariato. A Rio, sapete, c'è il mare. Copacabana, Ipanema ... E perciò non vedevo l'ora che venisse il sabato pomeriggio per andarmi a sdraiare sulla sabbia a prendere un po' di sole. 'Dopo ti porto a Petropolis', mi disse il mio amico la mattina del sabato mentre mi accompagnava al convegno.»

«Ma come a Petropolis? Per me va benissimo anche se restiamo a Rio. ...»

«Vedrai che non ti pentirai. Ti porto in un posto che solo pochi italiani conoscono», fu categorico lui.

«A posteriori devo dire che non mi sono pentito. Un luogo particolare. La strada per andare era poco più di una mulattiera e le indicazioni scarse. Salendo qualche volta il mio amico provò a chiedere indicazioni sulla strada.»

«È di qua», gli rispondevano, facendo segni vaghi con la mano,

«Vai avanti così. Poi la trovi. Non ti puoi sbagliare.»

«Se tanto mi dà tanto, dovette pensare ... e non chiese più niente a nessuno.»

«Dopo più di un'ora di strada, il mio amico parlò.»

«Ecco. Ci siamo quasi», disse.

E fermò la vettura in uno spiazzo immenso davanti a qualcosa che sembrava un grande stabilimento termale.

«Entriamo. Ti offro una caipiriña», propose.

Un ambiente felliniano. Spazi ampi e allucinanti. Colori elettrici presi a prestito dal futurismo. Piscine, prati, tavolini carichi di dolci e frutti esotici per gli aperitivi. Insomma una cosa particolare.

«E come si chiama questo posto?», chiesi.

«'A Quitandiña», rispose laconico.

«Una cosa immensa ...», considerai guardandomi intorno.

«Ora è così», rispose lui. «Cent'anni fa 'A Quitandiña era semplicemente una piccola baita di passaggio sulla strada verso le montagne di Rio. Precisamente una Posta per il cambio dei cavalli. Dove, anche, si poteva spizzicare qualcosa, fermarsi un po' per riposare. Questo è il significato della parola: piccola pausa di quiete, riposino ...»

Anche Fulvio si prese una piccola pausa, per fare un sorriso ironico ai suoi allievi.

«Cosa c'entra questo con le funzioni composte, eh?» chiese.

«Eh!» fu incisivo qualcuno.

«Appunto. Ora ve lo dico.»

Prese fiato, lasciò che anche gli altri lo prendessero. Fece un siparietto. Cioè si portò sulla pedana, davanti alla cattedra, faccia a faccia con le prime file. Come si faceva a teatro, quando si chiudeva il sipario e uno o due attori si portavano al margine della ribalta e improvvisavano qualcosa per dar tempo agli addetti di cambiare le scene.

«Vedete, secondo me», disse in tono confidenziale, «la definizione di funzione composta, è inutile. E poi così com'è, è anche ambigua ... Se ne può fare a meno. Insomma, qual è il problema?»

Il siparietto era finito e si portò alla lavagna per il finale.

«Ecco prendiamo radice di x », e lo scrisse alla lavagna.

«Se la dobbiamo derivare, lo sappiamo fare: uno su due radice di x », e scrisse anche questo.

$$\sqrt{x} \xrightarrow{\text{derivazione}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

«Se invece dovessimo derivare radice, che so, per esempio, di logaritmo di x », e lo scrisse

$$\frac{d\sqrt{\ln x}}{dx}$$

«Così, direttamente non lo sapremmo fare. Lo sapremmo fare se la variabile fosse il logaritmo di x . Cioè sapremmo derivare

$$\frac{d\sqrt{\ln x}}{d \ln x}$$

e verrebbe

$$\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$$

perché, in altri termini, è come se si ponesse

$$\ln x = t$$

e si derivasse

$$\frac{d\sqrt{t}}{dt}$$

verrebbe, infatti

$$\frac{d\sqrt{t}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

e, tenendo conto del significato di t , proprio come abbiamo detto,

$$\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$$

Ok?»

«No. Non ho capito. Come ha fatto a passare da $\frac{d\sqrt{\ln x}}{dx}$ a $\frac{d\sqrt{\ln x}}{d\ln x}$? Non è mica la stessa cosa...»

«Certo che non lo è...»

«E allora?»

«Io l'ho fatto sulla base delle parole che ho detto, cioè di fare come se la variabile fosse il logaritmo di x . In modo letterale. Cioè il logaritmo sotto radice è la variabile e noi deriviamo rispetto ad essa...»

«Ma non è quello che volevamo fare...»

«Infatti. Ve l'ho detto. Il nostro punto di partenza era quello di calcolare

$$\frac{d\sqrt{\ln x}}{dx}$$

No?»

«E allora quello che ha fatto è sbagliato...»

«E certo. Perché con la posizione $\ln x = t$ l'espressione $\frac{d\sqrt{\ln x}}{dx}$ equivale a

$$\frac{d\sqrt{t}}{dx}$$

siete d'accordo?»

«Sì. Ma allora siamo punto e da capo, perché questa derivata non la sappiamo fare. A meno che ...»

«Sì?»

«No è una sciocchezza, sicuramente ...»

«Dì, non ti preoccupare ...»

«La x , rispetto alla t è un'altra variabile. E perciò la derivata viene zero. Come succede nelle funzioni di più variabili ...»

«E no che non è un'altra variabile. Tra loro c'è una relazione: $\ln x = t$.»

«Ok. È una sciocchezza: c.v.d. professore. Mi scusi.»

«Macché scusi. Grazie del contributo.»

«Allora siamo punto e da capo veramente?»

«Non direi. Abbiamo capito che

$$\frac{d\sqrt{\ln x}}{d \ln x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$$

e che con la posizione $\ln x = t$, si ha:

$$\frac{d\sqrt{\ln x}}{dx} = \frac{d\sqrt{t}}{dx}$$

«Ora introduciamo nella formula quello che sappiamo, cioè scriviamo, inventando un po':

$$\frac{d\sqrt{t}}{dx} = \frac{d\sqrt{t}}{dt} \frac{1}{dx} \frac{dt}{1} = \frac{d\sqrt{t}}{dt} \frac{dt}{dx}$$

si capisce che può funzionare, perché si è passati dalla prima frazione all'ultima sostanzialmente moltiplicando e dividendo per dt . Siete d'accordo?»

«Mah! Professo' questa cosa l'ha pescata in un cappello a cilindro ...»

«Non ti convince che moltiplicando e dividendo per dt l'espressione iniziale non si altera?»

«No, non è questo che non mi convince. Lei mica ha fatto solo quello. Ha cambiato l'ordine, ha pure cambiato, mi sembra, il significato dei simboli ...»

«Va bene. Facciamo una cosa. Chi è d'accordo che non ho modificato la sostanza dell'espressione, alzi la mano.»

Fulvio sperava che ci fosse una selva di mani alzate, ma non fu così. Per concludere che quelle alzate fossero più delle altre le dovette contare e ricontare una seconda volta.

«Va bene. Allora questa cosa la passiamo a maggioranza», forzò.

Ma non gliela fecero andare liscia.

«Eh no professo' . . . » si fece portavoce il solito. «Lei così non ce lo spiega. Non ci fa capire.»

Aveva ragione lui, pensò Fulvio. Ma fu risoluto, perché anche lui pensava di avere le sue ragioni, e le mise in chiaro.

«In un certo senso è come dici tu. Hai ragione. Ma c'è un però . . . »

«E sarebbe?»

«Sarebbe che io sono sicuro che tu, pensandoci su per un po', ci arriverai da solo. In sostanza a te e a tutti gli altri che non hanno alzato la mano, vorrei dare questa chance. Se riflettete solo un momento si tratta di ripescare cose fatte nel corso di base e costestualizzarle in questo . . . »

«Lei è un paradritto, professo' . . . »

«Se non vi fidate, ve lo spiego. Non è che non lo so fare, anche subito . . . »

«Nessuno di noi lo pensa. Sappiamo bene che lei la sa lunga . . . Avoja si la sa lunga . . . »

«Allora?»

«Ok professore. Ci ha convinto . . . »

«Chi è d'accordo?»

Ora ci fu la selva di mani che Fulvio aveva sperato prima. Bel corso, pensò. Riprese.

«Allora. Riscriviamo in termini di x l'ultima espressione, si ottiene:

$$\frac{d\sqrt{t}}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d\sqrt{\ln x}}{d\ln x} \frac{d\ln x}{dx}$$

e notate che ora sappiamo fare le derivate di ambedue le frazioni che figurano nel prodotto. La prima è, come abbiamo scritto fin dall'inizio,

$$\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$$

la seconda è

$$\frac{1}{x}$$

cioè la derivata del logaritmo naturale. In sintesi

$$\frac{d\sqrt{t}}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d\sqrt{\ln x}}{d\ln x} \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \frac{1}{x}$$

che si può scrivere meglio

$$\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

quindi abbiamo trovato il risultato che cercavamo.»

Un po' di spaesamento. Non si aspettavano la soluzione così vicina. Ma dal fondo dell'aula, il solito con la voce bassa non volle demordere.

«E 'A Quitandiña che c'entra, professo' ?»

«E come che c'entra? Per derivare, tu parti derivando rispetto alla variabile rispetto a cui lo sai fare, o che ti piace di più, e ti fermi. Poi derivi quella variabile rispetto a un'altra variabile scelta da te, e ti fermi. E poi prosegui dopo un riposino. 'A Quitandiña, no?»

«Ah! Vabbé»

«Possiamo chiamare questo modo di procedere anche passeggiata derivatoria. La procedura ha termine quando si deriva l'ultima volta rispetto alla x , cioè alla variabile di derivazione assegnata»

«Ci fa vedere un altro esempio?»

«Volentieri. Vi mostro un paradosso.»

Questo vuole sempre strafare, aveva pensato il solito nel loggione. Fulvio lo percepì con sicurezza dall'espressione che gli vide dipinta sul volto.

«Ecco vi faccio vedere come si può calcolare, con la passeggiata derivatoria, la derivata di x rispetto ad x .»

«E non viene 1 professore?»

«Certo che sì. Però la derivata si può trovare usando ogni mezzo a vostra disposizione. Per esempio, procedendo come abbiamo visto prima, si può scrivere

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{d \sin x} \frac{d \sin x}{dx}$$

e ponendo $\sin x = t$ come si scrive x ?»

«Si scrive $\arcsin t$ professore.»

«Ok. Allora abbiamo

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{d \sin x} \frac{d \sin x}{dx} = \frac{\arcsin t}{dt} \frac{d \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cos t$$

ora, riscrivendo il $\sin x$ al posto di t , si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t = 1$$

come doveva essere.»

«Un altro modo di derivare, sempre la stessa funzione:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{d \ln x} \frac{d \ln x}{dx} = \frac{de^{\ln x}}{d \ln x} \frac{d \ln x}{dx} = e^{\ln x} \frac{1}{x} = x \frac{1}{x} = 1$$

insomma nella passeggiata derivatoria si introducono delle variabili intermedie, quelle sulle quali si fa il *riposino*, e queste si possono scegliere come si vuole e quante se ne vuole, purché la passeggiata si concluda con una derivazione rispetto a x »

«Cioè?»

«Indichiamo con s , t , v le variabili intermedie ed x , come s'è detto, quella di chiusura. Allora si ha

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dv} \frac{dv}{dx}$$

«E come le scegliamo queste variabili, per esempio?»

«Per esempio s si può scegliere uguale a $\sqrt{x}$. Poi scegliamo t uguale a $\frac{1}{x}$. Infine scegliamo $v = x^2$. Ora riscriviamo le frazioni in termini di x , si ottiene:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{dx}{d\sqrt{x}} \frac{d\sqrt{x}}{d\frac{1}{x}} \frac{d\frac{1}{x}}{dx^2} \frac{dx^2}{dx}$$

poi cominciamo a derivare.»

«Allora, siccome x è il quadrato di $\sqrt{x}$, sarà, derivando rispetto a $\sqrt{x}$,

$$\frac{dx}{d\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

siccome poi $\sqrt{x}$ è $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$, derivando i termini di $\frac{1}{x}$ si ottiene:

$$\frac{d\sqrt{x}}{d\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

andando avanti, $\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$; derivando allora rispetto a x^2 ,

$$\frac{d\frac{1}{x}}{dx^2} = \frac{d\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{dx^2} = -\frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

infine la derivata di x^2 rispetto ad x sarà $2x$, ovvero

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

ora, facendo tutti i prodotti,

$$2\sqrt{x} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right)^{-\frac{3}{2}} \right) \left(-\frac{1}{2} (x^2)^{-\frac{3}{2}} \right) 2x$$

potete vedere che si semplifica tutto e il risultato viene uguale ad 1, come dev'essere.»

«Ho capito, ma a che serve professo' ?»

«A sentirti più libero, no? E scusami se è poco ...»

«Che fatica, però ...»

«Oh, non penserete che abbiamo finito? ...»

«No, eh?»

«E no. Questo era per cominciare: era precisamente, come vi ho detto, la cosa che si vuole estendere ...»

«Cioè?»

«La derivazione col cambio di variabili. Dal caso di una funzione di una variabile a quella di un campo vettoriale. Precisamente il problema è questo: noi abbiamo un campo vettoriale, diciamo il 3 per 3 di cui abbiamo parlato ieri e che ho riscritto alla lavagna oggi, questo insomma ...» e Fulvio indicò:

$$\begin{cases} X = X(x, y, z) \\ Y = Y(x, y, z) \\ Z = Z(x, y, z) \end{cases}$$

«Bene», riprese, «Come si deriva questo campo?»

«Eh! 'Na parola ...»

«Cioè?»

«Capirai! Qui ce stanno tre funzioni e 'gnuna cià tre variabili. La derivata di quale e rispetto a chi si vuole trovà?»

«Guarda qua non si vuole fare torto a nessuno. Le vogliamo trovare tutte. Cioè le derivate di tutte le funzioni rispetto a ognuna delle variabili ...»

«Professò, qui ce vo' 'A Quitandiña ...»

«Ma che c'entra?»

«E come che c'entra? Ce vo' che ora se riposamo un po', no?» Fulvio capì bene che i ragazzi erano stanchi. Anche

lui del resto si era stancato abbastanza. Ma almeno voleva arrivare a porre il problema.

«Ve lo dico io che cosa ci vuole. Lo Jacobiano. Precisamente ...», e indicò, «Questo ...

$$J_{X,Y,Z,x,y,z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

dove ci sono tutte le derivate delle funzioni componenti rispetto a tutte le variabili. Anzi, ora vi esplicito la scrittura dello Jacobiano:

$$J(X, Y, Z, x, y, z)$$

la scrittura dice appunto: le derivate di X, Y, Z *maiuscole* (le funzioni componenti del campo vettoriale) rispetto alle x, y, z *minuscole* (le variabili indipendenti delle componenti).»

«Ora prendiamo quest'altro campo vettoriale 3 per 3:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \theta, \zeta) \\ y = y(\xi, \theta, \zeta) \\ z = z(\xi, \theta, \zeta) \end{cases}$$

«Oddio! E che ci dobbiamo fare professò?»

«Provate a indovinare ...»

Ci fu parlottio. I ragazzi si consultarono. Poi si propose una ragazzina pulita che stava sempre in prima fila.

«Forse può servire per introdurre nuove variabili indipendenti nel campo X, Y, Z al posto delle x, y, z »

«Bravissima.»

«Bravissimi tutti, allora», si schernì la ragazzina. «Ci siamo consultati.»

«Allora siete tutti d'accordo?»

«Sì. Abbastanza. Per citare lei, questa cosa può passare a maggioranza . . . »

Fulvio rise.

«Ho capito. È la nemesi. Mi state prendendo in giro. Me la sono cercata, dopo tutto . . . » ammise.

Anche i ragazzi risero.

Fulvio si girò verso la lavagna e scrisse:

$$J(x, y, z, \xi, \theta, \zeta)$$

«E questo che cos'è?» chiese.

«È lo Jacobiano del nuovo campo vettoriale rispetto alle nuove variabili. Credo», si fece avanti la ragazzina.

«Lo sapresti scrivere esplicitamente?»

«Alla lavagna?» chiese.

«Sì», rispose Fulvio.

«Senza impegno. Ci posso provare . . . »

E scrisse, senza nemmeno troppe esitazioni, se non quelle sulla grafica delle lettere greche:

$$J(x, y, z, \xi, \theta, \zeta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}$$

«Ora brava lo posso dire proprio a te.»

«Grazie professore. Posso tornare a posto?»

«Certo. Grazie.»

Fulvio aspettò che la ragazzina si fosse seduta e si girò verso la lavagna e scrisse:

$$J(X, Y, Z, x, y, z) J(x, y, z, \xi, \theta, \zeta)$$

«Questo è il prodotto dei due Jacobiani, Ok? Si può fare perché ognuno è una matrice 3 per 3, Ok?»

«Va bene un solo sì per tutt'e due le domande?» disse il solito orco dal loggione.

«Comprato! E che cos'è?» chiese Fulvio.

A pensarci bene la domanda era vaga. Si poteva rispondere una cosa qualunque. Ma l'orco sparò:

«È er teorema de 'A Quitandiña professò!»

Cazzo. Avevano contestualizzato, si disse Fulvio. E se lo poté dire in questi termini perché la fascia d'età dei suoi studenti non era di quelle protette: tutti maggiorenni.

«E che cosa esprime?» provò a chiedere.

L'orco dal loggione non ebbe esitazioni.

«Qui ce vo' Rita Montarcini . . . », disse indicando la ragazzina della prima fila.

«Che ne dice signorina?» fu diretto Fulvio.

«Ma! Più sulla scia di un convincimento indotto da come lei ha portato il discorso, che per un ragionamento autonomo, direi che esprime la matrice delle derivate del campo X, Y, Z rispetto alle variabili ξ, θ, ζ . Sì per il teo della Quitandiña, insomma. Mi sembra che localmente, cioè per ogni elemento del prodotto matriciale, si riduce al caso del cambio di una variabile nelle funzioni scalari, e quindi penso che sia valido.»

«Lei pensa che io sono un imbonitore?» chiese Fulvio facendo attenzione a non essere né ironico né provocatorio, tanto che la ragazzina non mostrò imbarazzo nel rispondere.

«No. Perché dovrei?» disse semplicemente.

«Allora le dico che quello che ha fatto lei è proprio un suo ragionamento autonomo e rigoroso per giunta. Mi sentirei di promuoverla all'esame fin da ora. . . » aggiunse sorridendo per evitare di cadere nella retorica.

Poi continuò.

«Abbiamo concluso, insomma, che l'uguaglianza», e intanto scriveva alla lavagna,

$$J(X, Y, Z, \xi, \theta, \zeta) = J(X, Y, Z, x, y, z) J(x, y, z, \xi, \theta, \zeta)$$

«È vera. Bene vi dico che resta vera anche se i campi non sono 3 per 3, purché si accordino in modo corretto i numeri delle variabili. Ok e su questa cosa non ci torniamo più.»

Questa storia ha una morale. La ragazzina in prima fila era stata indotta a fare un ragionamento rigoroso e corretto dal discorso di Fulvio. Fulvio non era un imbonitore. Queste cose, in qualche misura, hanno a che fare con la magia?

Finito di stampare nel mese di settembre del 2010 dalla «ERMES. Servizi Editoriali Integrati S.r.l.» 00040 Ariccia (RM), via Quarto Negroni 15, per conto della «Aracne editrice S.r.l.» di Roma.

CARTA copertina: Cartoncino *Amadeus Silk* 250 g/mq distribuito da Converting & Paper S.r.l.; interno: Usomano bianco senza legno *White Form* 80 g/mq distribuito da Converting & Paper S.r.l. | STAMPA nero: Océ VarioPrint 6250 Ultra; colore: Océ ColorSmart 665 Pro | LAMINAZIONE Foliant Gemini Compressor 400 A e *Softsilk Dry JHM* (polipropilene Matt) 25 µm distribuito da Mag Data-S.p.A. | ALLESTIMENTO broccatura fresata con Explore della New Bind S.r.l. e adesivo hot-melt poliuretano *Purmelt QR 3317 BR* della Henkel | TAGLIO POLAR-Werke Adolf Mohr 82 ST.