

A01

06

MATEMATICA –30

30 giorni prima dell'inizio dei corsi

Carlo Belingeri – Fulvio Bongiorno – Francesco Rosati

ARACNE

Copyright © MMV
Aracne editrice S.r.l.
ISBN 88-7999-014-4

Customer care
06 93781065
info@aracneeditrice.it
www.aracneeditrice.it

sede legale e redazione:
via Raffaele Garofalo, 133 a/b – 00173 Roma

amministrazione:
viale Gramsci, 264 pal. 6 – 00040 Lanuvio (RM)

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.
Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.

prima edizione: agosto 1992
ristampa corretta: settembre 2000
1 ristampa: febbraio 2005

PREFAZIONE

Da alcuni anni è andato aumentando il numero dei Corsi di Laurea, che prevedono tra gli insegnamenti riservati alle “Matricole” almeno una disciplina a carattere matematico; si pensi ad esempio ad Ingegneria, Architettura, Chimica, Fisica, Farmacia, Agraria, Scienze Economiche e Commerciali, Scienze Statistiche, Biologia, ecc.

D'altra parte, la mancata riforma degli insegnamenti delle Scuole Secondarie Superiori e dell'esame di maturità, rendono le “Matricole” sempre più in difficoltà quando debbono iniziare rapidamente e con successo, lo studio di una qualsiasi matematica a livello universitario.

Docenti o gruppi di studenti, spesso in forme spontanee, hanno tentato di sopprimere alle necessità del caso introducendo i “precorsi” di aggiornamento da tenere prima dell'inizio dei corsi ufficiali. A nostro avviso i risultati conseguiti sono ancora modesti, specie per la ridotta partecipazione degli aventi diritto; né vi sarebbe possibilità, specie nelle grandi sedi, di organizzare precorsi per tutti.

Si aggiunga a ciò che, in molti corsi di laurea, sono ormai di moda i corsi di matematica “compattati”, cioè svolti in non più di tre mesi: ciò non lascia alcuna possibilità di recupero a chi si trova ad avere difficoltà di avvio, per inadeguata conoscenza [spesso per colpa altrui!] di argomenti di base relativi ad insegnamenti di matematica seguiti negli 8 anni precedenti.

In questa difficile situazione, preoccupati per il disorientamento crescente, che provoca spesso dolorose rinunzie e inopinati abbandoni di studi prescelti con tante speranze, abbiamo ritenuto doveroso tentare una diversa sperimentazione, intendendo fornire a tutti gli studenti interessati un quadro di riferimento, circa gli argomenti ritenuti indispensabili per poter affrontare con serenità un qualsiasi corso di Matematica di livello universitario.

È nata così l'idea di questo fascicolo che le Matricole dovrebbero leggere a piccole dosi nei trenta giorni che precedono l'inizio dei corsi ufficiali; di qui il “meno trenta”, con l'augurio di giungere poi ad un “più trenta” in sede di verifica.

È quindi un mezzo idoneo per mettere ognuno nelle condizioni di effettuare un controllo sullo stato delle fondamenta sulle quali edificare poi un edificio (matematico) più o meno pesante, a seconda del corso di laurea prescelto. È in sostanza un invito a controllare, per prevenire eventuali pericoli, in particolare ove i corsi compattati non concedono tempo e spazio per colmare “in itinere” eventuali lacune.

La forma elementare prescelta per l'esposizione, farà sorridere molte matricole; ciò è quanto anche noi auspichiamo, nella speranza che moltissimi conoscano e bene gli elementi qui riportati.

In questo favorevole caso, avremo solo fornito una breve sintesi di quanto riteniamo indispensabile, e tolta qualche preoccupazione a chi poteva averne senza particolare motivo.

Purtroppo l'esperienza di anni di insegnamento in città diverse o in diverse Facoltà, ci fa temere il contrario ed allora questo opuscolo potrà fornire un supporto che va al di là di una rapida sintesi, contribuendo a porre le basi comuni per successivi auspicabili buoni sviluppi.

Un ringraziamento all'editore Gioacchino Onorati dell'ARACNE che ci è venuto incontro, dando una veste tipografica normalmente riservata ad opere di maggiore respiro, inserendo quest'opera nella collana "Matematica" e consentendoci anche di dotare il volumetto dell'indice analitico rendendone in tal modo più agevole la consultazione.

Roma, 20 agosto 1992

GLI AUTORI

INDICE

Prefazione	Pag.	v
-----------------------------	------	---

Capitolo 1 - Elementi di Teoria degli Insiemi

1.1 - Alcuni simboli di logica matematica	”	1
1.2 - Alcune nozioni sugli insiemi	”	1
1.3 - Operazioni tra insiemi	”	2
1.4 - Prodotto cartesiano	”	3

Capitolo 2 - Numeri reali

2.1 - Nozioni preliminari	”	4
2.2 - Numeri naturali	”	4
2.3 - Numeri relativi	”	5
2.4 - Numeri razionali	”	6
2.5 - Numeri reali	”	7
2.6 - Potenze e radici dei numeri reali	”	8
2.7 - Valore assoluto	”	9
2.8 - Logaritmo	”	9
2.9 - Rappresentazione decimale dei numeri reali	”	10

Capitolo 3 - Algebra

3.1 - Divisione dei polinomi; caso dei polinomi in una variabile	”	12
3.2 - Regola di Ruffini	”	14
3.3 - Regola di Ruffini iterata	”	16
3.4 - Divisione tra polinomi in più variabili	”	17
3.5 - Equazioni di secondo grado	”	18
3.6 - Equazioni di grado superiore al secondo	”	23

Capitolo 4 - Nozioni di Geometria Analitica

4.1 - Il piano cartesiano; distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$	”	28
4.2 - Punto medio del segmento di estremi $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$	”	29
4.3 - Baricentro del triangolo di vertici $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$	”	30
4.4 - La retta: casi particolari	”	30
4.5 - Retta congiungente due punti in posizione generica	”	31

4.6 - Osservazioni sull'equazione di una retta	Pag.	32
4.7 - Esempi di costruzioni di grafici	"	32
4.8 - Rappresentazione parametrica della retta	"	33
4.9 - Punto d'incontro di due rette	"	33
4.10 - Retta generica per il punto $P_0(x_0, y_0)$ assegnato	"	34
4.11 - Condizioni di parallelismo	"	34
4.12 - Rette parallele	"	35
4.13 - Condizioni di perpendicolarità	"	35
4.14 - Rette perpendicolari	"	36
4.15 - Distanza punto-retta	"	37
4.16 - La Parabola	"	38
4.17 - Retta e parabola	"	39
4.18 - Retta tangente alla parabola in un suo punto	"	40
4.19 - Rette tangenti alla parabola condotte da un punto esterno	"	41
4.20 - Parabola con asse parallelo all'asse delle x	"	42
4.21 - Proprietà geometriche delle parabole	"	43
4.22 - Circonferenza	"	45
4.23 - Retta e circonferenza	"	46
4.24 - Ricerca di rette tangenti	"	47
4.25 - Ellisse	"	49
4.26 - Proprietà geometriche dell'ellisse	"	49
4.27 - Iperbole	"	52
4.28 - Iperbole equilatera	"	52
4.29 - Proprietà geometriche dell'iperbole	"	53

Capitolo 5 - Famiglie di funzioni elementari

5.1 - La famiglia $y = x^\alpha$	"	55
5.2 - La famiglia $y = 1/x^\alpha$	"	56
5.3 - La famiglia $y = a^x$	"	57
5.4 - La famiglia $y = \log_a x$	"	58
5.5 - Le funzioni $y = a \sin bx$	"	59

Capitolo 6 - Disequazioni

6.1 - Disequazioni nella forma $f(x) \geq 0$	"	60
6.2 - Disequazioni lineari e quadratiche	"	60
6.3 - Il caso del prodotto	"	63
6.4 - Risoluzione di sistemi di disequazioni	"	66
6.5 - Disequazioni equivalenti	"	68

Capitolo 7 - Goniometria e Trigonometria

7.1 - Alcuni elementi introduttivi	Pag.	70
7.2 - Goniometria	"	71
7.3 - Variazione e grafico delle funzioni goniometriche	"	72
7.4 - Relazioni tra le funzioni goniometriche	"	73
7.5 - Formule varie di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli argomenti; formule di prostaferesi	"	74
7.6 - Trigonometria: relazioni fra gli elementi di un triangolo	"	76
7.7 - Triangolo qualunque	"	77
7.8 - Area di un triangolo qualunque	"	78
7.9 - Alcuni esempi	"	79
Indice analitico	"	81

1. ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

1.1 Alcuni simboli di logica matematica

Richiamiamo alcuni simboli di logica matematica che verranno utilizzati nel seguito allo scopo di abbreviare l'esposizione.

- $\forall$ (quantificatore universale): " $\forall x$ " significa "per ogni x ";
 $\exists$ (quantificatore esistenziale): " $\exists x$ " significa "esiste almeno un x ";
 $\implies$, $\iff$ (simboli connettivi detti rispettivamente: implicazione logica ed equivalenza logica): siano A , B due proposizioni, allora
 $A \implies B$ significa " A implica B ", ovvero "se è vera A di conseguenza è vera B ", ovvero, " B è condizione necessaria per A ", ovvero, " A è condizione sufficiente per B ";
 $A \iff B$ significa " A implica B e B implica A ", ovvero " A è vera se e solo se è vera B ", ovvero, " A è condizione necessaria e sufficiente per B e viceversa".

Ricordiamo che per il sussistere di una proposizione P , si può avere:

Condizione necessaria (CN): proprietà che deve essere posseduta da tutti gli enti che verificano P .

Condizione sufficiente (CS): proprietà tale che tutti gli enti che la possiedono, verificano P .

Condizione necessaria e sufficiente (CNS): proprietà tale che tutti e soli gli enti che la possiedono, verificano P .

Esempi

1. Proposizione A : $x > 9$; Proposizione B : $x > 5$; allora l'implicazione $A \implies B$ dice che CS per B è A e CN per A è B .
2. Proposizione A : x è un numero pari; Proposizione B : x è multiplo di 2; allora l'implicazione $A \iff B$ dice che CNS perché B sia vera è che A sia vera.

1.2 Alcune nozioni sugli insiemi

Assumiamo come acquisita la nozione di insieme. Gli oggetti che lo costituiscono si chiamano gli elementi dell'insieme. Gli insiemi si denotano con lettere maiuscole $A, \dots, X, \dots$, gli elementi con le lettere minuscole $a, \dots, x, \dots$. Per esprimere che un elemento x appartiene all'insieme A si scrive $x \in A$, se non vi appartiene si scrive $x \notin A$. Indichiamo con S l'insieme ambiente da cui trarre gli elementi di un insieme.

Il modo più semplice di rappresentare un insieme è quello di elencare, in parentesi graffe, i suoi elementi; per esempio

$$A = \left\{ 12, -\sqrt[3]{7}, 9, \frac{51}{4} \right\};$$

questa rappresentazione è agevole quando il numero degli elementi è relativamente piccolo.

In generale è più comodo definire un insieme assegnando una legge che consenta di stabilire se un oggetto appartiene o no all'insieme; per esempio l'insieme

$$A = \{x | x = 2n, \quad 5 \leq n \leq 100, \quad n \in \mathbb{N}\},$$

con $\mathbb{N}$ totalità degli interi $n \geq 1$; il simbolo $|$ si legge “tale che”.

Un insieme privo di elementi si dice insieme vuoto e si denota con $\emptyset$.

Se A e B sono due insiemi di S , si dice che A è contenuto in B e si scrive $A \subseteq B$, quando ogni elemento di A è anche elemento di B , cioè $x \in A \implies x \in B$; si può anche dire che A è un sottoinsieme di B .

Se si verifica $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ simultaneamente, ovvero $x \in A \iff x \in B$, si dice che A è identico a B e si scrive $A = B$; in caso contrario si scrive $A \neq B$.

Sia A un insieme di S ; si chiama complementare di A e si denota con CA , l'insieme degli elementi di S che non appartengono ad A :

$$CA = \{x | x \in S, x \notin A\}.$$

1.3 Operazioni tra insiemi

Per operazioni intendiamo l'unione, l'intersezione, la differenza tra due insiemi.

Unione. Si dice unione di due insiemi A e B e si denota con $A \cup B$, l'insieme costituito da tutti e soli gli elementi di S che appartengono ad A o a B ; si può scrivere

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Proprietà dell'unione:

$$A \cup A = A; \quad A \cup CA = S; \quad A \cup B = B \cup A; \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Intersezione. Si dice intersezione di due insiemi A e B e si denota con $A \cap B$, l'insieme costituito da tutti e soli gli elementi di S che appartengono ad A e a B ; si può scrivere

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$ si dice che gli insiemi sono *disgiunti*.

Proprietà dell'intersezione:

$$A \cap A = A; \quad A \cap CA = \emptyset; \quad A \cap B = B \cap A; \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Differenza. Si dice differenza di due insiemi A e B e si denota con $A - B$, o anche $A \setminus B$, l'insieme costituito da tutti e soli gli elementi di A che non appartengono a B ; si può scrivere

$$A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\} \quad \text{oppure} \quad A - B = A \cap \bar{B}.$$

1.4 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B (distinti o coincidenti) nell'ordine scritto, e fissati due elementi $x \in A$ e $y \in B$, si considera la coppia ordinata (x, y) , intendendo dire che al primo posto va messo l'elemento x di A e al secondo posto l'elemento y di B .

Si chiama prodotto cartesiano di A per B e si denota con $A \times B$, l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate (x, y) , con $x \in A$ e $y \in B$; si può scrivere

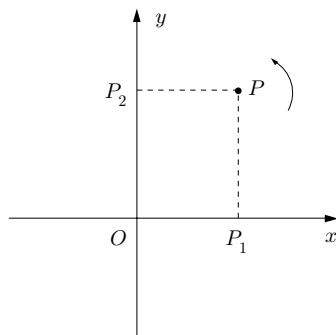
$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\},$$

(se $A = B$ il prodotto cartesiano si può denotare con A^2). Questa definizione si può estendere ad un qualsiasi numero finito di insiemi.

Esempio. Siano date due rette ortogonali in un piano tali che $A = \mathbb{R}$ è l'insieme dei punti della prima retta, $B = \mathbb{R}$ è l'insieme dei punti della seconda retta; allora $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ è rappresentato dall'insieme dei punti (x, y) , con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, del piano considerato.

Questo esempio introduce il concetto di coordinate cartesiane nel piano, che utilizzeremo a partire dal terzo capitolo.

Coordinate cartesiane nel piano. Fissiamo nel piano (vedi figura) due rette x, y tra loro perpendicolari (assi coordinati); chiamiamo origine il loro punto d'incontro O . Stabiliamo su ciascuna di queste rette un verso positivo, in modo che, con una rotazione antioraria di 90° , la semiretta positiva dell'asse x si sovrapponga a quella dell'asse y . Prendiamo un qualunque punto P del piano e siano P_1 e P_2 le sue proiezioni ortogonali sugli assi x, y . Fissata un'unità di misura, diciamo x e y , rispettivamente, le misure dei segmenti orientati $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$. I due numeri così definiti si chiamano le *coordinate cartesiane* del punto P . La x si chiama *ascissa*, la y *ordinata*, del punto P .



Così ad ogni punto del piano si può associare una coppia ordinata x, y di numeri reali. Viceversa, data una coppia ordinata x, y di numeri reali è possibile determinare un punto ed uno solo, che abbia per ascissa x e per ordinata y .

2. NUMERI REALI

2.1 Nozioni preliminari

Le scienze matematiche partono dal concetto di *numero* il quale, nel corso dei tempi, ha subito successivi ampliamenti, cioè sono state via via introdotte le classi dei: numeri naturali, numeri relativi, numeri razionali, numeri reali, numeri complessi.

Questi ampliamenti successivi sono dovuti principalmente:

a) ad una esigenza aritmetica, nel senso che quando nell'ambito di una classe di numeri non ha significato una data operazione aritmetica si cerca di ampliare quella classe introducendo nuovi numeri che consentono di rimuovere le eccezioni riguardanti le operazioni;

b) ad una esigenza geometrica, nel senso di rendere misurabili grandezze che tali non sono nella classe dei numeri in cui si sta operando.

Osserviamo che le classi numeriche man mano introdotte sono tali che ciascuna di esse è contenuta in tutte quelle successive in quanto gli ampliamenti suddetti vengono fatti in modo da mantenere le proprietà formali di cui godono le operazioni, secondo il criterio dovuto al matematico tedesco Hankel, detto *principio di permanenza delle proprietà formali*: le operazioni aritmetiche introdotte via via per le classi più ampie dovranno possedere le proprietà già verificate nelle classi più ristrette.

Per la Matematica è necessaria la conoscenza della classe dei numeri complessi ed in essa anche la collocazione delle altre classi numeriche.

Osserviamo infine che fino ai numeri reali si è giunti con successive estensioni dettate da esigenze di carattere pratico: eseguire una operazione, misurare una grandezza; i numeri complessi nascono da una creazione del pensiero matematico, trovando a posteriori applicazioni alle scienze esatte (per es. in elettrotecnica).

2.2 Numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali $1, 2, 3, \dots$, si indica con $\mathbb{N}$.

I numeri naturali (così detti perché nati in maniera intuitiva, spontanea), furono introdotti al fine di contare gli oggetti componenti un dato gruppo; sono poi state definite le operazioni, che con essi si potevano eseguire, e le relative proprietà.

Partiamo dal confronto tra due numeri naturali; passeremo poi alle loro operazioni.

Per i numeri naturali è sempre possibile effettuare il confronto tra due qualsiasi di essi a, b , cioè vale la *legge di tricotomia* nel senso che si verifica uno solo dei tre

casi seguenti

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

L'uguaglianza gode delle proprietà

riflessiva: $a = a$,

simmetrica: se $a = b$ allora $b = a$,

transitiva: se $a = b$ e $b = c$ allora $a = c$.

Per i numeri naturali si definiscono le operazioni di *addizione* $a + b$, di *moltiplicazione* ab ; queste sono sempre possibili ed a risultato *unico*, cioè hanno come risultato un ben determinato numero naturale; per esse valgono le seguenti proprietà

commutativa: $a + b = b + a$, $ab = ba$,

associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$,

distributiva⁽¹⁾: $a(b + c) = ab + ac$.

In base alla proprietà commutativa si ha che la somma ed il prodotto di un numero qualsiasi di termini non dipende dall'ordine con cui questi sono disposti; per la proprietà associativa gli stessi termini si possono associare a piacere utilizzando le parentesi; infine per la proprietà distributiva è consentito mettere in evidenza un fattore comune a più termini di una somma.

Per la moltiplicazione vale, inoltre, la legge di *annullamento del prodotto* per cui un prodotto è nullo se e solo se è nullo almeno uno dei fattori.

Alla classe dei numeri naturali si suole aggiungere lo zero il quale esprime il numero di elementi contenuti nell'insieme vuoto; per esempio nella scrittura del numero 703 è necessario disporre dello zero per esprimere che il numero in questione ha zero decine.

I numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ con l'aggiunta dello zero vengono detti numeri interi assoluti (e indicati talvolta con il simbolo $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$).

I numeri zero ed uno si chiamano gli elementi neutri rispettivamente per l'addizione e la moltiplicazione, in quanto

$$a + 0 = a; \quad a \cdot 1 = a.$$

Le operazioni inverse, sottrazione e divisione non sono sempre possibili in $\mathbb{N}_0$.

La sottrazione $a - b$ è possibile, nel senso di far ottenere un ben determinato intero assoluto, e fornisce risultato unico se e solo se $a \geq b$.

La divisione $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, intesa come operazione inversa della moltiplicazione, cioè come operazione avente lo scopo di determinare un intero q che, moltiplicato per b , dia a , è possibile, e fornisce risultato unico, solo se a è multiplo di b .

2.3 Numeri relativi

L'insieme dei numeri interi relativi si indica con $\mathbb{Z}$.

⁽¹⁾Della moltiplicazione rispetto alla addizione.

L'estensione della classe dei numeri naturali a quella dei relativi è dovuta alla esigenza di poter dare significato all'operazione di sottrazione senza eccezione.

I numeri relativi sono i seguenti

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

cioè gli interi assoluti con segno; lo zero è privo di segno.

Nell'ambito di questa classe di numeri, la sottrazione $a-b$ (intesa come $a+(-b)$) è sempre possibile ($a \gtrless b$) e fornisce risultato unico, nel senso di far ottenere un ben determinato numero relativo.

Per questa classe di numeri rimangono valide le operazioni e le loro proprietà formali già possibili nella classe, più ristretta, dei numeri naturali; il principio del mantenimento delle proprietà formali a volte riveste una certa importanza euristica, cioè mediante esso si può giustificare la regola dei segni per la moltiplicazione; infatti se vogliamo che in $\mathbb{Z}$ sussista la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, dovrà averci

$$0 = [(+a) + (-a)](+b) = (+a)(+b) + (-a)(+b) = ab + (-a)(+b)$$

e affinché il secondo membro sia zero, dovrà essere $(-a)(+b) = -ab$.

Inoltre se vogliamo che valga la proprietà commutativa, dovremo convenire che sia $(-a)(+b) = (+b)(-a)$ e da

$$0 = [(+a) + (-a)](-b) = (+a)(-b) + (-a)(-b) = -ab + (-a)(-b)$$

dovrà essere $(-a)(-b) = +ab$.

2.4 Numeri razionali

I numeri razionali si indicano con $\mathbb{Q}$.

L'estensione della classe dei numeri relativi a quella dei razionali è dovuta all'esigenza di poter dare significato all'operazione di divisione senza eccezione (rimane sempre esclusa la divisione per zero, anche nei successivi ampliamenti).

I numeri razionali sono i seguenti

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Accenniamo sinteticamente alla loro aritmetica.

Dati due numeri razionali $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$ si ha

1. $a = b$ se $mq = np$, $a \neq b$ se $mq \neq np$.
2. L'addizione e la moltiplicazione sono definite dalle uguaglianze

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}; \quad ab = \frac{m}{n} \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

3. I numeri $0 = \frac{0}{n}$ e $1 = \frac{n}{n}$ sono gli elementi neutri rispettivamente per l'addizione e la moltiplicazione, definiti da

$$a + 0 = a; \quad a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in \mathbb{Q}.$$

4. Le operazioni inverse, sottrazione e divisione, si riducono a quelle dirette dopo aver introdotto l'opposto di a , cioè $-a = -\frac{m}{n}$, il suo reciproco, cioè $a^{-1} = \frac{n}{m}$, definiti da

$$a + (-a) = 0; \quad aa^{-1} = 1; \quad a \neq 0, \quad \forall a \in \mathbb{Q}.$$

Si ha quindi la sottrazione $b - a = b + (-a)$ e la divisione $\frac{b}{a} = ba^{-1}$.

5. Si definisce l'operazione di elevamento a potenza a^n , $n \in \mathbb{N}$, come il prodotto di n fattori uguali ad a se $n > 1$, convenendo che $a^1 = a$; si pone poi, supponendo $a \neq 0$, $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Le operazioni inverse dell'operazione di elevamento a potenza che sono, partendo dalla relazione $a^n = b$: l'estrazione di radice se si vuole a conoscendo b ed n , calcolo del logaritmo se si vuole n conoscendo a e b , non sono sempre possibili con i soli numeri razionali e con esponenti interi.

Si effettuerà, pertanto, un ulteriore ampliamento.

Per tutte le operazioni valgono le proprietà formali già possibili negli insiemi numerici precedenti⁽²⁾.

2.5 Numeri reali

I numeri reali si indicano con $\mathbb{R}$.

Per introdurre i numeri reali accenniamo ai due problemi fondamentali che non hanno ricevuto completa sistemazione in $\mathbb{Q}$: a) il problema della misura; b) il problema della estrazione di radice.

a) È noto dalla geometria che esistono grandezze commensurabili (per es. due segmenti α, β per i quali esistono due numeri naturali m, n tali che $m\alpha = n\beta$ e si scrive $\beta = \frac{m}{n}\alpha$ e $\frac{m}{n}$ è la misura di β rispetto ad α , preso come unità di misura) ed esistono grandezze incommensurabili (per es. esistono coppie di segmenti che non ammettono un multiplo comune: il lato e la diagonale di un quadrato).

b) Esistono numeri razionali che non sono potenze n -esime perfette; per esempio non esiste alcun numero razionale $d = \frac{p}{q}$ tale che $d^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 35$; infatti se

⁽²⁾L'insieme $\mathbb{N}$ è *discreto* nel senso che tra due numeri naturali non consecutivi, esiste un numero finito di numeri naturali. Analogamente l'insieme $\mathbb{Z}$ è discreto. L'insieme $\mathbb{Q}$ non è *discreto*: infatti tra due numeri razionali esistono infiniti numeri razionali. Questo dipende dalla circostanza che tra due numeri razionali esiste sempre un altro razionale; infatti siano $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, allora se $0 < \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, con $q > 0, s > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\frac{p}{q} < \frac{p+nr}{q+ns} < \frac{r}{s}.$$

Per questo motivo si dice che $\mathbb{Q}$ è denso; questa proprietà implica che i numeri razionali non ammettono successivo immediato.

così fosse, si avrebbe

$$\frac{p^2}{q^2} = 35 \implies p^2 = 5 \cdot 7 \cdot q^2$$

e questa uguaglianza è assurda perché ogni intero si scompone in uno ed in un sol modo in fattori primi e in questa uguaglianza il fattore 5 (o 7) entra a potenza dispari nel secondo membro, mentre entra a potenza pari nel primo membro.

La sistemazione di questi due problemi sarà possibile con la conoscenza dei numeri reali; la loro definizione si può dare in vari modi; qui li introdurremo con il metodo delle classi contigue che si basa sul fatto che un numero reale è noto quando si conoscono le sue approssimazioni razionali sia per difetto che per eccesso.

Diamo la seguente

Definizione — Due classi A e B di numeri razionali si dicono *contigue* se soddisfano alle seguenti condizioni:

1. Ogni numero di A è minore o uguale di ogni numero di B (le classi sono separate).
2. Preso un razionale $\varepsilon > 0$, piccolo a piacere (per es. $10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-n}$), è possibile determinare un numero $a \in A$ ed un numero $b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$ (le classi sono indefinitamente ravvicinate).

Chiameremo elemento di separazione delle due classi contigue un numero razionale l che è maggiore o uguale di ogni elemento di A e contemporaneamente minore o uguale di ogni elemento di B .

Esistono però coppie di classi contigue prive di elemento di separazione razionale.

Allora, quando esiste l'elemento razionale di separazione, si individua mediante una coppia di classi contigue l'elemento stesso, come quell'unico numero razionale contemporaneamente maggiore o uguale di tutti i numeri di A e minore o uguale di tutti i numeri di B ; quando non esiste l'elemento razionale di separazione si converrà che una coppia di classi contigue definisca un nuovo ente aritmetico detto *numero irrazionale*.

Pertanto una coppia di classi contigue ammette sempre un elemento di separazione, razionale o irrazionale, che può essere ottenuto anche a partire da altre classi contigue (A', B'): in particolare $A \cup B = Q$.

Chiameremo *numero reale* un qualsiasi numero razionale o irrazionale.

Tralasciamo la aritmetica dei numeri reali per quanto concerne le operazioni e le loro proprietà formali, già esaminate in $\mathbb{Q}$: in sostanza si può dire che si opera in “un certo modo” sui razionali approssimanti.

Soffermiamoci invece su altre questioni.

2.6 Potenze e radici dei numeri reali

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ qualunque, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$; la *potenza* α^n è data dal prodotto di n fattori tutti uguali ad α e si pone $\alpha^1 = \alpha$; $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$, con $\alpha \neq 0$.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, si chiama *radice aritmetica n -esima* di α e si indica $\sqrt[n]{\alpha}$, l'unico numero reale e positivo β tale da aversi $\beta^n = \alpha$. Se $\alpha = 0$ si pone in conseguenza $\beta = 0$.

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ si pone

$$\alpha^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{\alpha} \right)^m; \quad \alpha^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{\alpha} \right)^m}, \quad \alpha \neq 0.$$

Sia infine $\alpha \in \mathbb{R}$ e α' irrazionale; si ha che la potenza $\alpha^{\alpha'}$ resta definita solo con $\alpha > 0$. Tale potenza ha un unico valore reale positivo, individuato dalle approssimazioni di α' con razionali.

2.7 Valore assoluto

Si chiama *valore assoluto* di un numero reale α , il numero reale non negativo

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

È dunque sempre $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$; in particolare $|0| = 0$; risulta sempre $\alpha \leq |\alpha|$.

Per ogni coppia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti relazioni

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|; \quad |\alpha - \beta| \geq \left| |\alpha| - |\beta| \right|; \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|; \quad |\alpha^n| = |\alpha|^n.$$

Nelle prime di queste relazioni vale la disuguaglianza stretta quando i due numeri α, β sono discordi.

2.8 Logaritmo

Premettiamo che si chiama equazione esponenziale un'equazione della forma $a^x = b$, $a, b, x \in \mathbb{R}$. Enunciamo ora il seguente

Teorema — Se a, b sono positivi e $a \neq 1$, l'equazione esponenziale $a^x = b$ ammette una ed una sola soluzione $x \in \mathbb{R}$.

Per la soluzione x si presentano i casi seguenti:

se $a > 1$, $b > 1$ oppure $0 < a < 1$, $b < 1$, allora $x > 0$;

se $a > 1$, $b < 1$ oppure $0 < a < 1$, $b > 1$, allora $x < 0$;

se $b = 1$, $a > 0$, allora $x = 0$.

Diamo ora la definizione seguente:

Definizione — La soluzione $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione esponenziale $a^x = b$, con a, b positivi $a \neq 1$ si chiama *logaritmo di b in base a* e si scrive $x = \log_a b$.

Ricordiamo alcune proprietà evidenti ed alcune formule note, relative ai logaritmi di numeri positivi:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x; & \log_a 1 &= 0; & \log_a a &= 1; \\ \log_a(uv) &= \log_a u + \log_a v; & \log_a \frac{u}{v} &= \log_a u - \log_a v; & \log_a u^v &= v \log_a u. \end{aligned}$$

Posto $\log_a x = u$, $\log_b x = v$ si ha $a^u = x$, $b^v = x$ quindi $a^u = b^v$ da cui $u = v \log_a b$, ossia $\log_a x = \log_b x \log_a b$ (scambiando a con b)

$$\log_b x = \log_a x \log_b a.$$

Da queste formule segue che $\log_a b \log_b a = 1$.

2.9 Rappresentazione decimale dei numeri reali

Il numero reale è stato introdotto con il metodo delle coppie di classi contigue di numeri razionali; dal punto di vista pratico conviene utilizzare la cosiddetta rappresentazione decimale.

Per i numeri razionali si ha la seguente proprietà di rappresentazione:

Un numero razionale positivo $\frac{m}{n}$ si può scrivere nella forma $p, c_1 c_2 \dots$, con p parte intera e $c_1 c_2 \dots$ le cifre decimali provenienti dalla divisione di m per n . Questo procedimento può arrestarsi, cioè il *numero delle cifre decimali è finito* (es. $\frac{39}{12} = 3,25$), oppure non arrestarsi, cioè il *numero delle cifre decimali è infinito*; in questo caso il numero è *illimitato periodico*, nel senso che un gruppo di cifre decimali, da un certo punto in poi si ripete successivamente infinite volte (es. $\frac{211}{44} = 4,79\overline{54}$, le cifre sopralineate costituiscono il *periodo*, cioè la parte che si ripete). Viceversa, se si conosce il numero decimale illimitato periodico, si risale alla frazione generatrice con regole note; per esempio

$$3,5\overline{27} = \frac{35}{10} + \frac{27}{990} = \frac{3465 + 27}{990} = \frac{3492}{990} = \frac{194}{55}.$$

Per i numeri *irrazionali* positivi si può usare la scrittura precedente

$$\alpha = p, c_1 c_2 c_3 \dots$$

col significato che α è il numero reale individuato dalle classi contigue costituite, l'una dai numeri $p, p + \frac{c_1}{10}, p + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100}, \dots$ l'altra dai numeri $p + 1, p + \frac{c_1 + 1}{10}, p + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2 + 1}{100}, \dots$; il numero α , non essendo un razionale, sarà *illimitato e non periodico*.

Per i numeri reali negativi $-\alpha$ si adotta la rappresentazione decimale di α preceduta dal segno $-$; per esempio

$$-\frac{194}{55} = -3,5\overline{27} \quad \text{oppure} \quad -\frac{194}{55} = -4 + (4 - 3,5\overline{27}) = -4 + 0,4\overline{72}$$

qualora si voglia avere la parte decimale positiva (ciò che è utile ad esempio nel calcolo con i logaritmi).

Osserviamo che in pratica non è possibile scrivere tutte le cifre che formano la rappresentazione decimale di un numero reale; si dirà che un numero reale è dato quando è noto il procedimento di calcolo che permette di determinare quante cifre si vogliono della sua rappresentazione decimale.

Si chiamano valori approssimati del numero $\alpha > 0$ per difetto e per eccesso, a meno di un'unità decimale dell'ordine i , i numeri razionali

$$p, c_1 c_2 \dots c_i \quad (\text{minori di } \alpha) \text{ e } p, c_1 c_2 \dots (c_i + 1) \quad (\text{maggiori di } \alpha).$$

Dopo ciò è evidente come si eseguono le operazioni servendosi della rappresentazione decimale dei numeri reali; i risultati possono ottenersi con l'approssimazione che si desidera.

* * *

Nota - Dopo quanto è stato detto sui numeri reali, facciamo notare che rimangono alcune questioni insolute; per esempio: la radice n -esima di un numero negativo, la generalizzazione della potenza $\alpha^{\alpha'}$, la generalizzazione del logaritmo.

Per dare una risposta completa a tali quesiti bisognerà introdurre dei nuovi enti aritmetici, detti numeri complessi, che sono del tipo $\alpha + i\beta$, con $i = \sqrt{-1}$.

Si pensi, per esempio, di voler risolvere l'equazione

$$x^2 + 2px + q = 0, \quad \text{con } p^2 - q < 0;$$

le soluzioni $x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$ non hanno significato in $\mathbb{R}$.

Volendo creare delle soluzioni per l'equazione in questione si può procedere così

$$x = -p \pm \sqrt{-1} \sqrt{q - p^2} = -p \pm i \sqrt{q - p^2},$$

avendo posto formalmente $\sqrt{-1} = i$.

Questi due numeri, che sono del tipo detto sopra, si riguardano come soluzioni dell'equazione, e, del resto, la soddisfano, pur di convenire che $i^2 = -1$ e di operare poi come se i fosse una qualsiasi lettera.

Per l'approfondimento dello studio dei numeri complessi provvederà l'Analisi Matematica.

3. ALGEBRA

3.1 Divisione dei polinomi; caso dei polinomi in una variabile

L'algoritmo della divisione tra polinomi funziona come quello della divisione ordinaria tra numeri⁽¹⁾.

A tale scopo si comincia con l'ordinare i polinomi, dividendo e divisore [grado dividendo $\geq$ grado divisore], secondo le potenze decrescenti della variabile, e si prepara lo schema per l'operazione, lasciando, eventualmente, spazi liberi in corrispondenza delle potenze mancanti (coefficienti nulli).

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 & -6 \\ \hline & x^2 - 2x + 3 \end{array}$$

Si impegnano tanti termini del dividendo, quanti sono quelli del divisore (contando anche eventuali termini mancanti); si divide il primo dei termini impegnati per il primo termine del divisore, e il risultato si segna nell'apposito spazio, sotto al dividendo;

$$\begin{array}{r|l} \overline{2x^4 - 5x^3 + 4x^2} & -6 \\ \overline{2x^4 - 4x^3 + 6x^2} & x^2 - 2x + 3 \\ \hline & -x^3 - 2x^2 \end{array}$$

si moltiplica il monomio ottenuto per il divisore, incolonnando i termini trovati con quelli del dividendo di ugual grado;

si sottrae, segnando il risultato sotto una linea appositamente tracciata; la potenza massima risulterà eliminata;

si completa la differenza trovata facendo scendere i termini residui del dividendo e si ricomincia ad impegnare i termini.

⁽¹⁾Si ricordi che le cifre di un numero intero, nella forma decimale, rappresentano i coefficienti delle potenze del 10 (base della numerazione); per es. $624 = 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 & -6 \\
 \underline{2x^4 - 4x^3 + 6x^2} & \\
 -x^3 - 2x^2 & -6 \\
 \underline{-x^3 + 2x^2 - 3x} & \\
 -4x^2 + 3x & -6 \\
 \underline{-4x^2 + 8x - 12} & \\
 -5x + 6 &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x^2 - 2x + 3 \\
 2x^2 - x - 4
 \end{array}$$

L'operazione termina non appena si ottiene, per differenza, un polinomio di grado inferiore al divisore; tale polinomio è il resto della divisione.

Il quoziente è il polinomio scritto sotto il divisore, e risulta di grado pari alla differenza dei gradi del dividendo e del divisore.

Nell'esempio:

dividendo: $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 6$,

divisore: $x^2 - 2x + 3$,

quoziente: $2x^2 - x - 4$,

resto: $-5x + 6$,

Si ha, ovviamente l'identità:

$$2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 6 = (2x^2 - x - 4)(x^2 - 2x + 3) - 5x + 6$$

$$\text{dividendo} = \text{quoziente} \cdot \text{divisore} + \text{resto},$$

come accade per la divisione tra numeri.

Nel caso di resto *nullo* il dividendo risulta divisibile per il divisore e può essere *fattorizzato* nel prodotto del quoziente per il divisore.

Esempio

$$(2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 16x + 12) : (x^2 - x + 2).$$

Si ottiene con la regola esposta:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 16x + 12 & \\
 \underline{2x^4 - x^3 + 2x^2} & \\
 -10x^3 + 17x^2 - 16x & \\
 \underline{-10x^3 + 5x^2 - 10x} & \\
 12x^2 - 6x + 12 & \\
 \underline{12x^2 - 6x + 12} & \\
 0 &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 2x^2 - x + 2 \\
 x^2 - 5x + 6
 \end{array}$$

Si ha la fattorizzazione valida $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 16x + 12 = (2x^2 - x + 2)(x^2 - 5x + 6).$$

3.2 Regola di Ruffini

La regola di Ruffini è un algoritmo semplificato che si può usare se il divisore è un polinomio di primo grado del tipo $x - b^{(2)}$.

$$(3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 12): (x - 2).$$

Si scrivono di seguito i coefficienti del dividendo, inclusi gli zeri in corrispondenza di eventuali termini mancanti;

2	3	-2	4	0	-12
	↓				
	3				

si costruisce lo schema indicato, lasciando a destra il termine noto del dividendo; nella riga di sotto, alla sinistra della prima linea verticale, si inserisce il termine noto del divisore *cambiato di segno*;

si trascrive (in pratica si copia) il primo coefficiente del dividendo, sotto la linea orizzontale, conservando l'incolonnamento;

2	3	-2	4	0	-12
	↓		6		
	3				

si moltiplica il termine di sotto ottenuto, il 3, per il termine del divisore, il 2, e il prodotto si scrive nel rigo superiore, incolonnato a destra; si sommano i due termini

2	3	-2	4	0	-12
	↓		6		
	3		4		

e si ripete l'operazione del moltiplicare e sommare finché non si arriva a scrivere un numero, eventualmente lo zero, nell'ultima riga alla destra della seconda linea verticale dello schema.

2	3	-2	4	0	-12
	↓		6	8	24
	3		4	12	24
					36

⁽²⁾Ci si può ricondurre a questo caso anche quando il divisore sia del tipo $ax + b$, dividendo preliminarmente per a il dividendo e il divisore (proprietà invariante della divisione). Va ricordato che, così operando, il resto della divisione risulterà anch'esso diviso per a .

Tale numero è il resto della divisione, naturalmente di grado zero (poiché il divisore è di primo grado) alla sua sinistra si trovano i coefficienti del quoziente, che risulterà di grado inferiore di una unità rispetto a quello del dividendo.

Precisamente:

quoziente: $3x^3 + 4x^2 + 12x + 24$

resto: 36.

Anche ora sarà ovviamente $\forall x \in \mathbb{R}$

$$3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 12 = (3x^3 + 4x^2 + 12x + 24)(x - 2) + 36;$$

com'è immediato verificare.

Nel caso di resto uguale a zero, il polinomio dividendo è *divisibile* per $x - b$ e può essere fattorizzato nel prodotto del divisore $x - b$ per il quoziente.

Esempio

$$(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 6) : (x - 2)$$

Si ottiene, dividendo,

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -3 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & \downarrow & 2 & -2 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

Il quoziente è $x^3 - x^2 + 3$, mentre il resto è 0 (si veda l'ultimo termine dell'ultima riga, alla destra della linea verticale), pertanto il dividendo è *divisibile* per $x - 2$ e si ha la fattorizzazione:

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = (x - 2)(x^3 - x^2 + 3).$$

Previsione del resto

Il resto della divisione per il binomio $x - b$ può esser calcolato sostituendo nel dividendo, b al posto della variabile x . Indicando con $D(x)$ il polinomio dividendo, e con r il resto, si ha:

$$r = D(b), \quad \text{cioè} \quad D(b) = 0 \iff r = 0.$$

Per la prima divisione si ha:

$$D(2) = 3 \cdot (2^4) - 2(2^3) + 4(2^2) - 12 = 36.$$

Per la seconda divisione:

$$D(2) = (2^4) - 3(2^3) + 2(2^2) + 3 \cdot 2 - 6 = 0$$

In entrambi i casi la previsione si mostra corretta.

3.3 Regola di Ruffini iterata

Nel caso di polinomi divisibili, la regola di Ruffini è applicabile, in modo iterato, anche quando il divisore sia di grado superiore al primo, purché si possa scrivere come prodotto di termini come $x - b$

Il controllo della divisibilità dei polinomi può esser fatto controllando la divisibilità per ciascuno dei fattori del dividendo, presi separatamente.

Esempio

$$(x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12) : [(x^2 - 3x + 2)(x - 3)] .$$

In effetti il divisore può essere ulteriormente fattorizzato, poiché risulta

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) .$$

La divisione da effettuare così diventa:

$$(x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12) : [(x - 1)(x - 2)(x - 3)] .$$

Si controlla la divisibilità secondo quanto si è detto, controllando la divisibilità del dividendo

$$D(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

per i fattori del divisore

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) ,$$

presi uno alla volta.

Usando la regola della previsione del resto, si ha:

$$D(1) = 1 - 4 - 1 + 16 - 12 = 0 ,$$

$$D(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 2^2 + 16 \cdot 2 - 12 = 0 ,$$

$$D(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 - 3^2 + 16 \cdot 3 - 12 = 0 ,$$

pertanto i polinomi sono divisibili.

Si procede ora con l'operazione, dividendo successivamente per $x - 1$, $x - 2$ ed $x - 3$, come viene mostrato di seguito.

	1	-4	-1	16	-12
1	↓	1	-3	-4	12
	1	-3	-4	12	=
2	↓	2	-2	-12	
	1	-1	-6	=	
3	↓	3	6		
	1	2	=		

Quoziente: $x + 2$.

Resto: zero.

Il dividendo è dunque fattorizzabile come segue

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x + 2)(x - 1)(x - 2)(x - 3) .$$

3.4 Divisione tra polinomi in più variabili

Nel caso di polinomi in più variabili, si sceglierà una di esse per l'ordinamento e le altre verranno trattate come parametri noti.

Naturalmente la scelta dell'una o dell'altra variabile non condiziona in alcun modo il risultato, poiché nella divisione è garantita l'unicità della coppia (quoziente, resto) per ogni coppia di (dividendo, divisore)⁽³⁾.

Esempio

$$(x^4 - x^2y^2 - 2y^4 - x^2y - y^3 + 2x + 1) : (x^2 + y^2).$$

I modo

Si ordina secondo le potenze decrescenti della variabile x ; si tratta la y come costante assegnata, si raccolgono a fattore i termini in x con lo stesso grado.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - (y^2 + y)x^2 + 2x - y^3 - 2y^4 + 1 & x^2 + y^2 \\ \hline x^4 + y^2x^2 & x^2 - (2y^2 + y) \\ \hline -(2y^2 + y)x^2 + 2x - y^3 - 2y^4 + 1 & \\ -(2y^2 + y)x^2 & -y^3 - 2y^4 \\ \hline & 2x \qquad +1 \end{array}$$

Quoziente: $x^2 - 2y^2 - y$.

Resto: $2x + 1$.

II modo

Si ordina secondo le potenze decrescenti della variabile y ; si considera la x come parametro assegnato

$$\begin{array}{r|l} -2y^4 - y^3 - x^2y^2 - x^2y + x^4 + 2x + 1 & y^2 + x^2 \\ \hline -2y^4 & -2y^2 - y + x^2 \\ \hline & -y^3 + x^2y^2 - x^2y + x^4 + 2x + 1 \\ & -y^3 & -x^2y \\ \hline & x^2y^2 & +x^4 + 2x + 1 \\ & x^2y^2 & +x^4 \\ \hline & & 2x + 1 \end{array}$$

Si ritrovano, come si vede, i precedenti valori per il quoziente ed il resto.

⁽³⁾Con la richiesta che il resto abbia grado, rispetto alla variabile dell'ordinamento, inferiore al divisore; il quoziente abbia per grado la differenza dei gradi tra dividendo e divisore. Nel caso della divisione tra numeri, ovviamente, il problema non si pone.

3.5 Equazioni di secondo grado

Equazioni binomie pure

Esse sono del tipo⁽⁴⁾

$$ax^2 = b, \quad a \neq 0$$

si ricava:

$$x^2 = \frac{b}{a};$$

se $\frac{b}{a}$ è positivo, si hanno le due soluzioni reali

$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}; \text{ sono in uso anche le scritture } x_1 = -\sqrt{\frac{b}{a}}, x_2 = \sqrt{\frac{b}{a}}; x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}};$$

se $\frac{b}{a}$ è negativo, si hanno le due soluzioni immaginarie:

$$x = \pm i\sqrt{-\frac{b}{a}} \quad (5); \text{ ovvero } x_1 = -i\sqrt{-\frac{b}{a}}, x_2 = i\sqrt{-\frac{b}{a}}; x_{1,2} = \pm i\sqrt{-\frac{b}{a}};$$

se b è nullo, allora anche $\frac{b}{a}$ è nullo, e si hanno le soluzioni coincidenti nulle

$$x = 0, \quad \text{ovvero} \quad x_1 = x_2 = 0.$$

Si osservi che equazioni di questo tipo, anche nel caso in cui presentano coefficienti interi, possono avere soluzioni irrazionali o immaginarie.

Esempi:

$$\begin{aligned} 3x^2 = 1; \quad x^2 = \frac{1}{3}, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}. \\ 3x^2 + 2 = 0; \quad x^2 = -\frac{2}{3}, \quad x_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Equazioni binomie spurie

Esse sono del tipo⁽⁶⁾

$$ax^2 + bx = 0, \quad a \neq 0.$$

Raccogliendo la x a fattore, si ottiene:

$$x(ax + b) = 0$$

⁽⁴⁾La condizione $a \neq 0$ è richiesta affinché l'equazione sussista.

⁽⁵⁾ i è l'unità immaginaria, definita come $\sqrt{-1}$. Si ha $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1, \dots$

⁽⁶⁾La condizione $a \neq 0$ è richiesta affinché l'equazione sia effettivamente di secondo grado.

e da qui, per la legge d'annullamento del prodotto⁽⁷⁾,

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Si osservi che tutte le equazioni binomie spurie hanno la soluzione nulla, e che se i coefficienti a e b sono razionali, tale si mantiene anche la soluzione

$$x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Esempi:

$$x^2 - 3x = 0; \quad x(x - 3) = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3.$$

$$3x^2 + 4x = 0; \quad x(3x + 4) = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{4}x = 0; \quad x\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right) = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{8}.$$

In sostanza un'equazione binomia spuria *può avere* la soluzione x_2 irrazionale, *solo* in presenza di almeno un coefficiente irrazionale.

Esempi:

$$3x^2 + (\sqrt{2} - 3)x = 0; \quad x[3x - (3 - \sqrt{2})] = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$(1 - \sqrt{3})x^2 + (2 - 2\sqrt{3})x = 0; \quad x[(1 - \sqrt{3})x + 2(1 - \sqrt{3})] = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -2.$$

Equazioni complete

Esse sono del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Per trovare le soluzioni si ha la seguente ben nota *formula risolutiva*:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

⁽⁷⁾La condizione che si annulli il prodotto di quantità reali o complesse, è che uno (almeno) dei fattori sia nullo.

Esempi:

$$x^2 - 3x + 2 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \implies \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

$$x^2 - x + 9 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-36}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{35}}{2} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{1 - i\sqrt{35}}{2} \\ x_2 = \frac{1 + i\sqrt{35}}{2}. \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0; \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-9}}{2} = \frac{3 \pm 0}{2}; \quad x_1 = x_2 = \frac{3}{2}.$$

L'espressione sotto la radice quadrata viene detta discriminante dell'equazione ed indicata con la lettera greca Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

A seconda che Δ sia maggiore, uguale, o minore di zero, l'equazione presenta soluzioni reali e distinte, coincidenti, oppure complesse⁽⁸⁾ coniugate.

Esempi:

$$x^2 - 7x + 12 = 0;$$

$\Delta = 49 - 4 \cdot 12 = 1 > 0$; l'equazione ammette radici reali e distinte

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} \implies \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

L'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con le soluzioni reali e distinte x_1, x_2 , può essere scritta nella forma:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

ove tutti i termini sono reali.

Si dice che l'equazione è *riducibile* (fattorizzabile) *nel campo reale*.

Se l'equazione è riducibile, il trinomio a primo membro è divisibile per i binomi $x - x_1$ ed $x - x_2$. Nel caso degli esempi relativi a radici reali e distinte, si ha:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 = 0 &\implies (x - 1)(x - 2) = 0, \\ x^2 - 7x + 12 = 0 &\implies (x - 3)(x - 4) = 0. \end{aligned}$$

⁽⁸⁾Un numero complesso è la somma di un numero reale con uno immaginario, cioè del tipo $u + iv$, con $u, v \in \mathbb{R}$; $u - iv$ è il suo *coniugato*; $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Considerata l'equazione

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0,$$

poiché $\Delta = 1 - 1 = 0$, essa ammette radici reali coincidenti $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

Se l'equazione ammette radici coincidenti (reali) la fattorizzazione diventa particolarmente semplice.

Si ha cioè:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Il primo membro dell'equazione si riduce così ad un *quadrato perfetto*, a meno della costante moltiplicativa a .

Nel caso degli esempi relativi a radici coincidenti, si ha:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 &\implies \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0, \\ x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 &\implies \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Data l'equazione

$$x^2 - x + 1 = 0$$

poiché $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, essa ammette radici complesse coniugate

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Un'equazione con radici complesse non è riducibile al prodotto di fattori reali.

Come si arriva alla formula risolutiva

Si moltiplicano per $4a$ ambo i membri dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

si ottiene:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0;$$

si aggiunge b^2 ad ambo i membri e si sposta il termine $4ac$ al secondo membro; si ottiene

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Nel primo membro si può riconoscere un quadrato perfetto; si ha così:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

ovvero:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

e dunque:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Formula (risolutiva) ridotta

Se il coefficiente b è del tipo $2h$, se cioè l'equazione si può scrivere nella forma:

$$ax^2 + 2hx + c = 0,$$

la formula risolutiva può essere semplificata come segue:

$$x_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - ac}}{a};$$

tale formula risolutiva viene detta *ridotta*. L'espressione $h^2 - ac$ è la quarta parte del $\Delta = b^2 - 4ac$, e viene per l'appunto indicata con $\Delta/4$.

Esempi:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1 \implies \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4}; \quad x_1 = x_2 = 2.$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm i.$$

Relazioni tra soluzioni e coefficienti

Si hanno le seguenti relazioni tra le soluzioni x_1, x_2 e i coefficienti a, b, c dell'equazione di secondo grado.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (\text{somma delle radici}),$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (\text{prodotto delle radici}).$$

Da queste formule se ne possono ricavare altre come

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a},$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c},$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2},$$

.....

3.6 Equazioni di grado superiore al secondo

Biquadratiche

Sono del tipo

$$ax^4 + bx^2 + c = 0;$$

si risolvono ponendo $x^2 = t$.

Esempio

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$$

ponendo $x^2 = t$ si ha:

$$\begin{aligned} t^2 - 5t + 4 &= 0 \\ t_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \implies \begin{cases} t_1 = 1 \implies x_{1,2} = \pm 1 \\ t_2 = 4 \implies x_{3,4} = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Riducibili

Sono quelle in cui il polinomio al primo membro si può fattorizzare, riconoscendo a priori qualche soluzione.

Esempio

$$4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0.$$

Indicato con $P(x)$ il polinomio al primo membro, si riconosce che è:

$$P(1) = 0;$$

$P(x)$ è pertanto divisibile per il binomio $x - 1$, (regola della *previsione del resto*).

Procedendo col metodo di Ruffini, si ha:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 4 & -12 & 11 & -3 \\ 1 & \downarrow & 4 & -8 & 3 \\ \hline & 4 & -8 & 3 & // \end{array}$$

e pertanto l'equazione può scriversi nella forma fattorizzata:

$$(x - 1)(4x^2 - 8x + 3) = 0.$$

Per la legge d'annullamento del prodotto si ha:

$$x - 1 = 0 \implies x_1 = 1$$

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \implies x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4} = \frac{4 \pm 2}{4} \implies \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Trinomie

Sono del tipo

$$ax^{2h} + bx^h + c = 0;$$

si risolvono ponendo $x^h = t$.

Esempio

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0;$$

ponendo $x^3 = t$, si ha:

$$t^2 - 9t + 8 = 0 \implies t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} \implies \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 8, \end{cases}$$

ovvero

$$x^3 - 1 = 0 \implies (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$x^3 - 8 = 0 \implies (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$x_4 = 2$$

$$x_{5,6} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Reciproche

Vanno sotto questo nome equazioni i cui coefficienti hanno particolari proprietà di simmetria. Sono di vario genere, come qui di seguito sinteticamente riportato.

$$\text{Reciproche} \left\{ \begin{array}{l} 1^a \text{ specie} \left\{ \begin{array}{l} \text{grado dispari} \\ 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \text{grado pari} \\ 2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \\ \\ 2^a \text{ specie} \left\{ \begin{array}{l} \text{grado dispari} \\ 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \text{grado pari} \\ 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Formalmente hanno i coefficienti simmetrici (equidistanti dagli estremi), con lo stesso segno o segno opposto; avendo ordinato il polinomio a primo membro secondo le potenze decrescenti.

Si risolvono sfruttando la proprietà comune a tutte: *le equazioni reciproche hanno soluzioni reciproche*; cioè se x_1 è soluzione, lo è anche $\frac{1}{x_1}$.

Per quelle di grado dispari segue che una soluzione sarà reciproca di sé stessa e quindi uguale ad 1 (prima specie) oppure a -1 (seconda specie); pertanto queste equazioni sono *riducibili*.

Esempi

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0.$$

Indicando con $P(x)$ il polinomio al primo membro, si ha effettivamente, come si è detto,

$$P(1) = 0;$$

pertanto $P(x)$ è divisibile per il binomio $x - 1$.

Col metodo di Ruffini, si ottiene la fattorizzazione:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & -7 & 7 & -2 \\ & \downarrow & 2 & -5 & 2 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & // \end{array}$$

$$(x - 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0.$$

Per la legge d'annullamento del prodotto, segue:

$$x - 1 = 0 \implies x_1 = 1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \implies x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \implies \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Analogamente per l'equazione

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Il polinomio $P(x)$ al primo membro è divisibile, come si è detto, per il binomio $x + 1$, avendosi effettivamente $P(-1) = 0$. Si ha allora

$$\begin{array}{c|ccc|c} -1 & 2 & -3 & -3 & 2 \\ & \downarrow & -2 & 5 & -2 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & // \end{array}$$

$$(x + 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0;$$

ne segue:

$$x + 1 = 0 \implies x_1 = -1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \implies \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Esaminiamo ora l'equazione

$$2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0.$$

In questo tipo di equazioni il primo membro $P(x)$ è divisibile sia per $x - 1$ che per $x + 1$; si ha, infatti: $P(1) = P(-1) = 0$.

Col metodo di Ruffini iterato, si ha:

1	2	-5	0	5	-2
	↓	2	-3	-3	2
	2	-3	-3	2	//
-1	↓	-2	5	-2	
	2	-5	2		//

Si ottiene, pertanto:

$$(x - 1)(x + 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0.$$

Per la legge d'annullamento del prodotto si ha:

$$x - 1 = 0 \implies x_1 = 1$$

$$x + 1 = 0 \implies x_2 = -1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \implies x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 2.$$

Infine, per l'equazione

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0,$$

si dividono ambo i membri per x^2 ⁽⁹⁾ e si ottiene

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

Si pone

$$x + \frac{1}{x} = t$$

e si osserva che risulta:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2.$$

Sostituendo si ha allora:

$$6(t^2 - 2) - 35t + 62 = 0 \quad , \quad 6t^2 - 35t + 50 = 0$$

⁽⁹⁾ $x = 0$ non è soluzione dell'equazione, e pertanto può ipotizzarsi $x \neq 0$.

e, con la formula risolutiva, si trova

$$t_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{12} = \frac{35 \pm 5}{12} \implies \begin{cases} t_1 = \frac{5}{2}, \\ t_2 = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Per $t_1 = \frac{5}{2}$, si ha:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \quad \text{ovvero} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

e quindi

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2;$$

per $t_2 = \frac{10}{3}$, si ha:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}, \quad \text{ovvero} \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

e quindi:

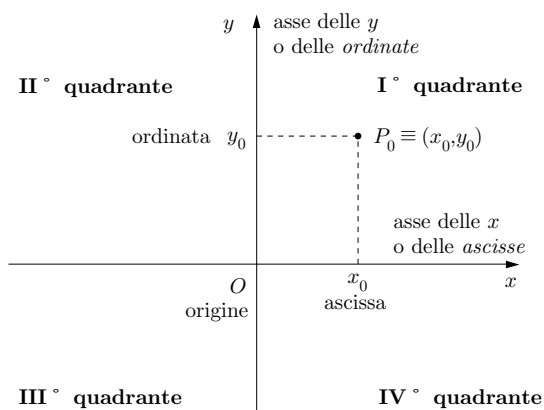
$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3} \implies \begin{cases} x_3 = \frac{1}{3}, \\ x_4 = 3. \end{cases}$$

4. NOZIONI DI GEOMETRIA ANALITICA

4.1 Il piano cartesiano; distanza tra due punti

Richiamiamo brevemente alcune nozioni fondamentali relative alla geometria piana, precisando anche alcuni elementi di nomenclatura circa le coordinate cartesiane, cioè al piano cartesiano.

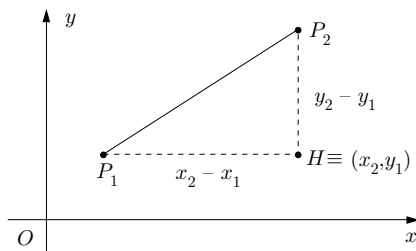
I simboli sono quelli consueti.



Veniamo ora alla distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.

Si ha evidentemente

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



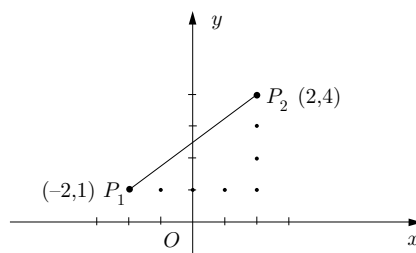
con $\overline{P_1 P_2} = 0$, se e solo se $P_1 \equiv P_2$.

Esempio:

$$P_1(-2, 1), P_2(2, 4)$$

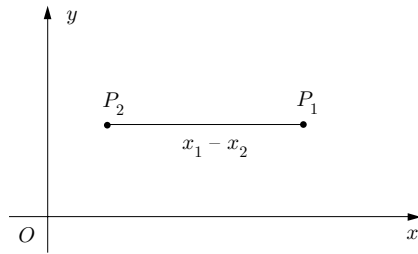
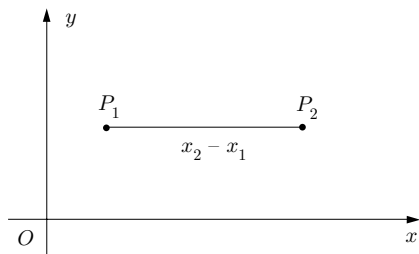
$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(2 + 2)^2 + (4 - 1)^2} = 5$$

La distanza (assoluta) tra due punti è un numero positivo (o nullo).



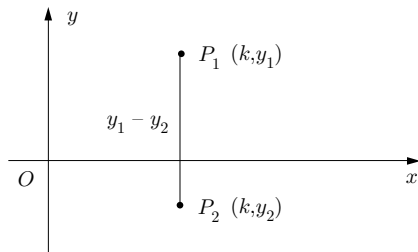
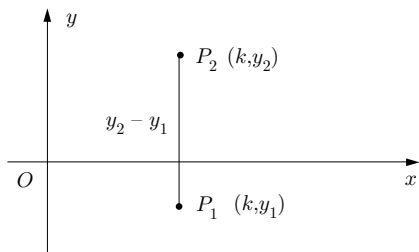
Casi particolari

Punti con la stessa ordinata $P_1(x_1, h)$, $P_2(x_2, h)$



$$\overline{P_1 P_2} = |x_2 - x_1|.$$

Punti con la stessa ascissa $P_1(k, y_1)$, $P_2(k, y_2)$

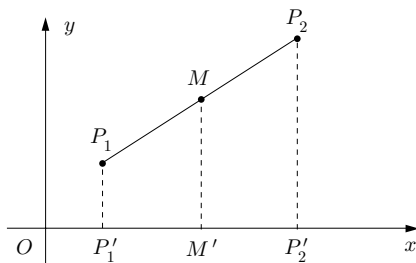


$$\overline{P_1 P_2} = |y_2 - y_1|.$$

4.2 Punto medio del segmento di estremi $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

Si ha

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

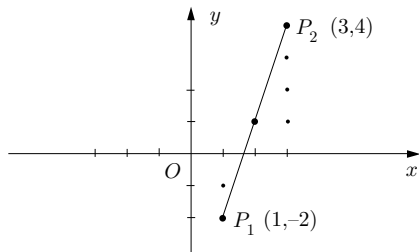


Esempio:

$$P_1(1, -2), \quad P_2(3, 4)$$

$$M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) = (2, 1).$$

La formula si dimostra facendo uso del teorema di Talete.



Con riferimento alla prima figura, ove i segmenti $P_1P'_1$, MM' , $P_2P'_2$ sono paralleli, si ha, infatti che da $\overline{P_1M} = \overline{MP_2}$, ne segue $\overline{P'_1M'} = \overline{M'P'_2}$.

Avendo indicato con x l'ascissa di M , uguale a quella di M' , si ha

$$x - x_1 = x_2 - x$$

da cui segue, per l'appunto

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

in modo analogo si procede per le ordinate.

Si possono trovare formule per le coordinate di punti che dividono un assegnato segmento in n parti uguali.

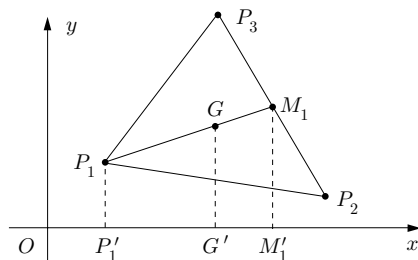
4.3 Baricentro del triangolo di vertici $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$

Trattasi del punto di intersezione delle mediane:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Per dimostrare la formula si ricordi che il baricentro G divide la mediana P_1M_1 in due parti, di cui P_1G è doppia di GM_1 .

Segue dal teorema di Talete $\overline{P'_1G'} = 2\overline{G'M'_1}$.



Indicando con x l'ascissa del baricentro e ricordando che l'ascissa di M_1 è data da $\frac{x_2 + x_3}{2}$, si ha: $x - x_1 = 2\left(\frac{x_2 + x_3}{2} - x\right)$ da cui segue:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3};$$

analogamente per la y .

4.4 La retta: casi particolari

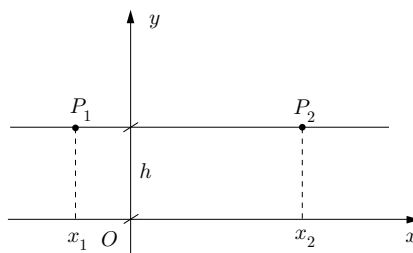
Retta orizzontale

(congiungente punti con la stessa *ordinata*) $P_1(x_1, h)$, $P_2(x_2, h)$.

Le coordinate dei punti (x, y) della retta verificano la $y = h$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

L'asse delle x ha equazione

$$y = 0.$$



Retta verticale

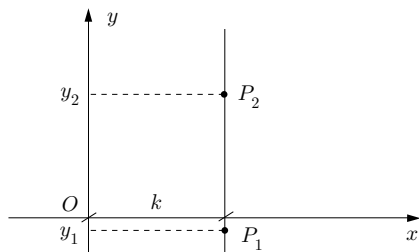
(congiungente punti con la stessa *ascissa*) $P_1(k, y_1)$, $P_2(k, y_2)$

Si ha l'equazione

$$x = k, \quad (\forall y \in \mathbb{R}).$$

L'asse delle y ha equazione

$$x = 0.$$

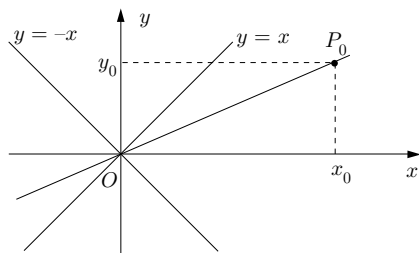
*Rette per l'origine*

(e per il punto $P_0(x_0, y_0)$) si ha

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}.$$

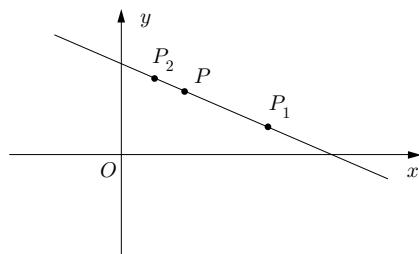
La bisettrice del 1° e 3° quadrante ha equazione $y = x$.

La bisettrice del 2° e 4° quadrante ha equazione $y = -x$.

**4.5 Retta congiungente due punti in posizione generica**

La retta per $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ è il luogo dei punti $P(x, y)$ le cui coordinate verificano l'equazione

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}.$$

**Esempio**

Retta per $P_1(2, 1)$, $P_2(3, 3)$; si ha

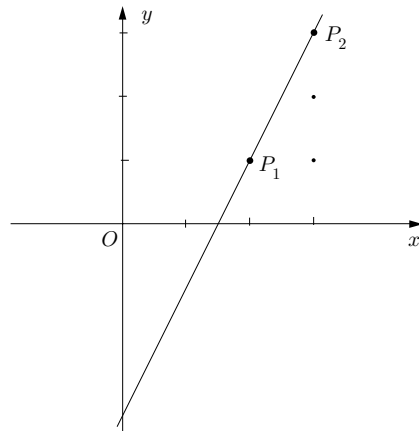
$$\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y - 1}{3 - 1},$$

ovvero

$$x - 2 = \frac{y - 1}{2}$$

e, semplificando

$$2x - y - 3 = 0.$$



4.6 Osservazioni sull'equazione di una retta

La retta nel piano cartesiano xy si rappresenta con una equazione lineare (di 1° grado) in x ed y .

Se la retta è parallela ad uno degli assi manca la variabile di quell'asse. L'equazione di un'assegnata retta può porsi in diverse forme. Le più importanti sono

la forma esplicita: $y = mx + q$;

la forma implicita: $ax + by + c = 0$.

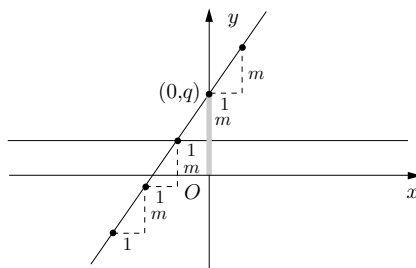
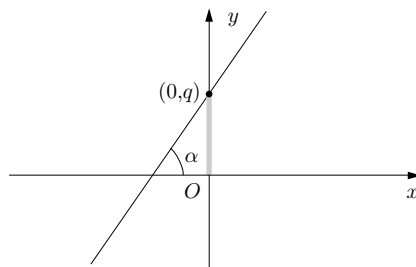
Nella forma esplicita m e q hanno il significato geometrico illustrato nella figura. Vengono detti:

m : coefficiente angolare, $m = \operatorname{tg} \alpha$;

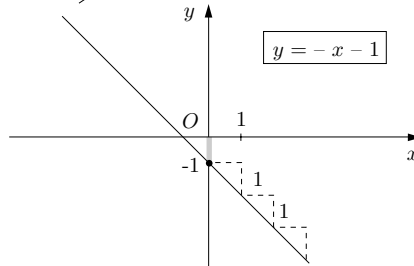
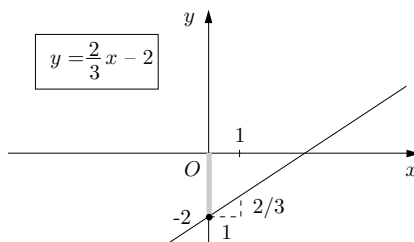
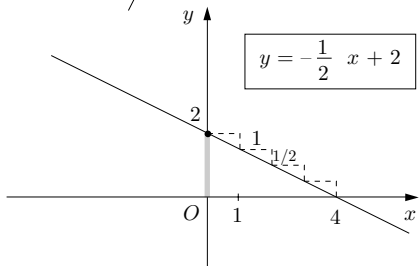
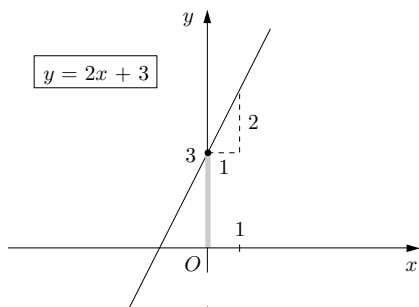
q : ordinata all'origine.

Il coefficiente angolare m esprime di quanto si incrementa (aumenta o diminuisce) la y per un incremento unitario della x .

Questa proprietà suggerisce un comodo metodo grafico per ottenere (cioè disegnare i) punti della retta.



4.7 Esempi di costruzioni di grafici



4.8 Rappresentazione parametrica della retta

Un'altra importante rappresentazione, detta parametrica, si ottiene introducendo un parametro t uguale al valore comune dei due rapporti

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t;$$

si ha allora

$$\begin{aligned} x - x_1 &= t(x_2 - x_1), \\ y - y_1 &= t(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Ogni fissato valore di t genera una coppia di valori (x, y) che esprimono le coordinate di un punto della retta.

Al variare di t su tutto $\mathbb{R}$ si ottengono tutti i punti della retta.

Per $t = 0$ si ottiene il punto $P_1(x_1, y_1)$, per $t = 1$ il punto $P_2(x_2, y_2)$; per $0 \leq t \leq 1$ si ottengono i punti del segmento P_1P_2 .

La forma più usata per la rappresentazione parametrica è del tipo

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt, \end{cases}$$

ove, rispetto alla precedente, si è posto

$$x_2 - x_1 = m, \quad y_2 - y_1 = n.$$

4.9 Punto d'incontro di due rette

Per trovare le coordinate del punto d'incontro di due rette si risolve il sistema delle loro equazioni

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

si ricava x dalla 2^a e si sostituisce nella prima, si ha:

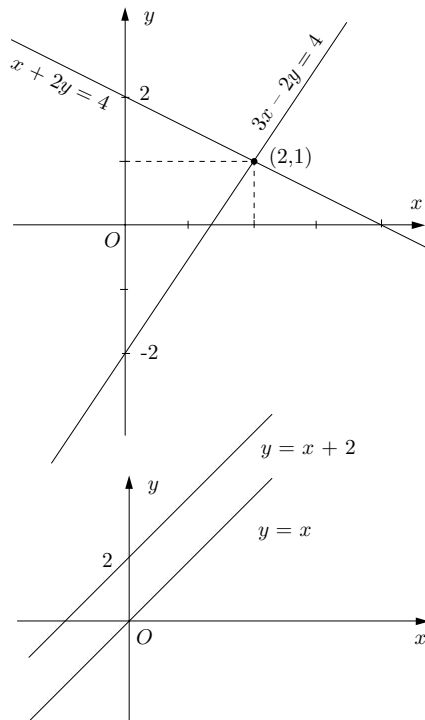
$$3(4 - 2y) - 2y = 4, \quad -8y = -8, \quad \text{cioè}$$

$$x = 2, \quad y = 1.$$

Talvolta può accadere che il sistema non abbia soluzione: ciò significa che le rette in questione non hanno alcun punto in comune, cioè risultano *parallele*; ad esempio

$$\begin{cases} y = x \\ y = x + 2 \end{cases} \implies x = x + 2, \quad 0 = 2,$$

impossibile.



Infine può accadere che il sistema abbia infinite soluzioni: ciò vuol dire che le rette hanno infiniti punti in comune, cioè sono coincidenti; in tal caso le equazioni sono equivalenti, anche se formalmente diverse. Per esempio

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \\ 3x - 6y + 2 = 0; \end{cases}$$

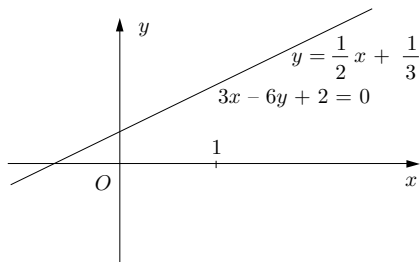
si ha perciò

$$3x - 6\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) + 2 = 0,$$

$$3x - 3x - 2 + 2 = 0; \quad 0 = 0,$$

vera per ogni valore di x .

La seconda equazione è la forma implicita della prima.



4.10 Retta generica per il punto $P_0(x_0, y_0)$ assegnato

Forma esplicita; salvo la verticale $x = x_0$ si ha

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Forma implicita:

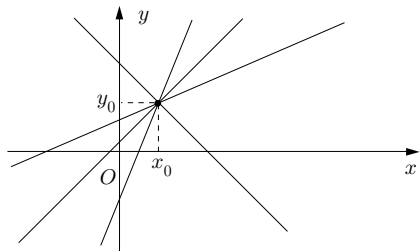
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Esempio

Le rette per $P_0(1, -2)$ sono date da:

$$y + 2 = m(x - 1), \text{ forma esplicita, } x = 1;$$

$$a(x - 1) + b(y + 2) = 0, \text{ forma implicita.}$$



4.11 Condizioni di parallelismo

Per le rette in forma esplicita:

$$y = mx + q \quad , \quad y = m'x + q',$$

la condizione è espressa da

$$\boxed{m = m'}.$$

Per le rette in forma implicita:

$$ax + by + c = 0 \quad , \quad a'x + b'y + c' = 0,$$

la condizione è:

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}}.$$

4.12 Rette parallele

Per le rette in forma esplicita

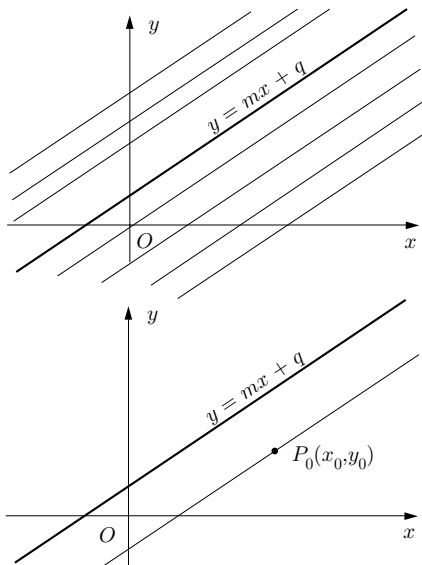
$$y = mx + q, \quad m, q \text{ assegnati},$$

la generica retta parallela ha equazione:

$$y = mx + h, \quad \text{al variare di } h$$

la parallela per l'assegnato punto $P_0(x_0, y_0)$ ha equazione:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}.$$



Per le rette in forma implicita

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \text{ assegnati},$$

la generica retta parallela ha equazione

$$ax + by + h = 0, \quad \text{al variare di } h;$$

la parallela per l'assegnato punto $P_0(x_0, y_0)$ ha equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

4.13 Condizioni di perpendicolarità

Per le rette in forma esplicita e non parallele agli assi

$$y = mx + q, \quad y' = m'x + q'$$

la condizione è espressa da

$$\boxed{m \cdot m' = -1}.$$

Per le rette in forma implicita

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0$$

la condizione è:

$$\boxed{aa' + bb' = 0}.$$

4.14 Rette perpendicolari

Per le rette in forma esplicita

$$y = mx + q, \quad m, q \text{ assegnati},$$

con $m \neq 0$, la generica retta perpendicolare ha equazione

$$y = -\frac{1}{m}x + h, \quad \text{con } h \text{ variabile};$$

la perpendicolare per l'assegnato punto $P_0(x_0, y_0)$ ha equazione:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

Per le rette in forma implicita

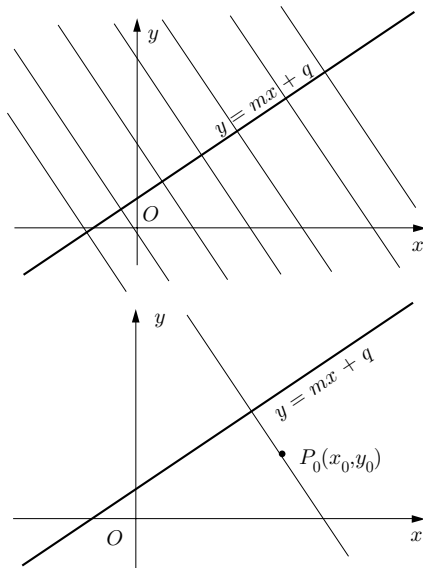
$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \text{ assegnati},$$

la generica perpendicolare ha equazione:

$$bx - ay + h = 0, \quad \text{con } h \text{ variabile},$$

la perpendicolare per l'assegnato punto $P_0(x_0, y_0)$ ha equazione:

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$



Esempi

Retta generica parallela alla retta

$$y = \frac{1}{2}x - 1; \text{ si ha l'equazione}$$

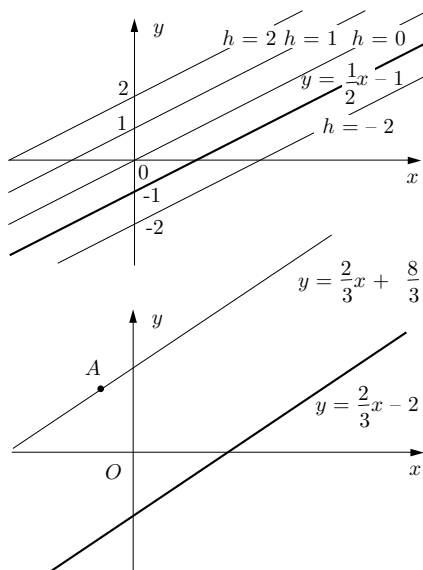
$$y = \frac{1}{2}x + h.$$

Retta per $A(-1, 2)$ parallela alla retta $y = \frac{2}{3}x - 2$; si trova l'equazione

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x + 1),$$

ovvero

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$$



Retta per $A(2, 4)$ parallela alla retta $2x - 3y + 2 = 0$; si trova l'equazione:

$$2(x - 2) - 3(y - 4) = 0, \quad \text{ovvero} \quad 2x - 3y + 8 = 0.$$

Retta generica perpendicolare alla

$$y = \frac{1}{2}x + 1;$$

si trova l'equazione:

$$y = -2x + h.$$

Retta per $A(2, 2)$ perpendicolare alla retta

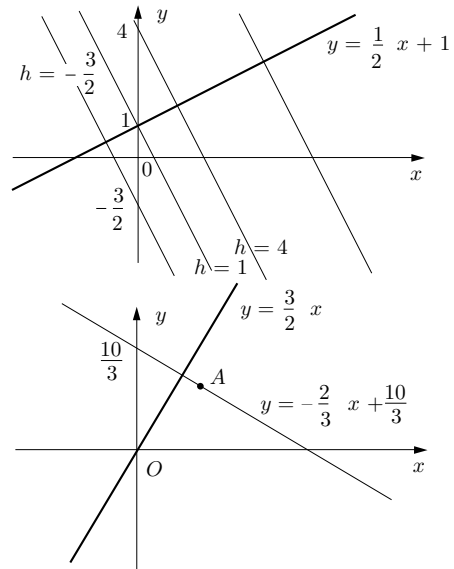
$$y = \frac{3}{2}x;$$

si trova l'equazione:

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 2)$$

ovvero

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}.$$



Retta per $A(-1, 2)$ perpendicolare alla retta $3x - y + 2 = 0$; si trova l'equazione $x + 1 + 3(y - 2) = 0$, ovvero $x + 3y - 5 = 0$.

4.15 Distanza punto-retta

Assegnato il punto $P_0(x_0, y_0)$ e la retta

$r: y = mx + q$, si ha

$$d(P_0, r) = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Invece nel caso della retta

$r: ax + by + c = 0$, si ha

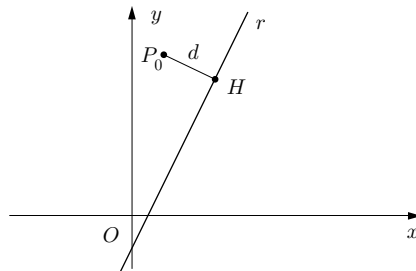
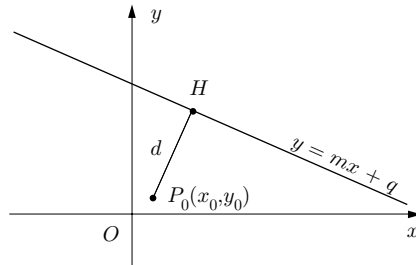
$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Esempi

Dati $P_0(1, 5)$ ed

$r: y = 2x - 1$, si ha

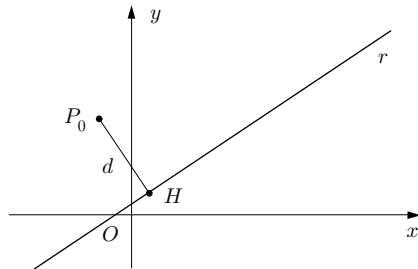
$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 5 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$



Dati $P_0(-1, 3)$ ed

$r: 2x - 3y + 1 = 0$, si ha

$$d = \frac{|2(-1) - 3 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{10}{\sqrt{13}}.$$



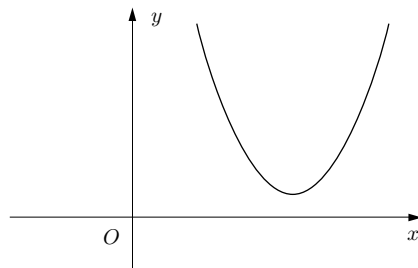
4.16 La Parabola

Parabola con asse verticale (parallelo all'asse delle y).

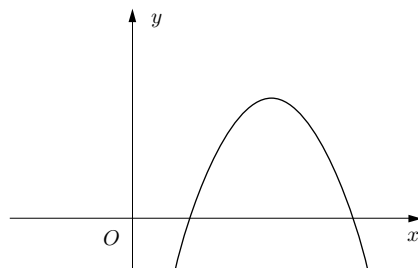
Equazione tipica:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0);$$

$a > 0$ concavità verso l'alto,



$a < 0$ concavità verso il basso,



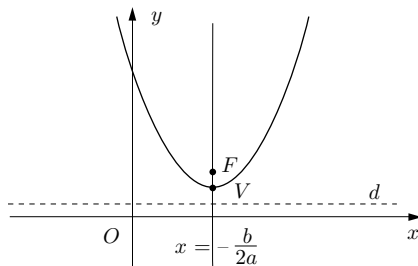
$$\text{Vertice } V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

asse, equazione $x = -\frac{b}{2a}$,

$$\text{Fuoco } F \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a} \right),$$

direttrice d , equazione $y = \frac{-1 - \Delta}{4a}$.



Esempio

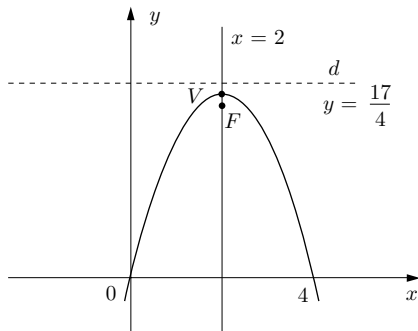
$$y = 4x - x^2,$$

$$V \equiv (2, 4),$$

$$\text{asse } x = 2,$$

$$\text{Fuoco } F \equiv \left(2, \frac{15}{4}\right),$$

$$\text{direttrice: } y = \frac{17}{4}.$$

**4.17 Retta e parabola**

Le intersezioni tra una parabola ed una retta assegnate, si trovano risolvendo il sistema delle loro equazioni.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

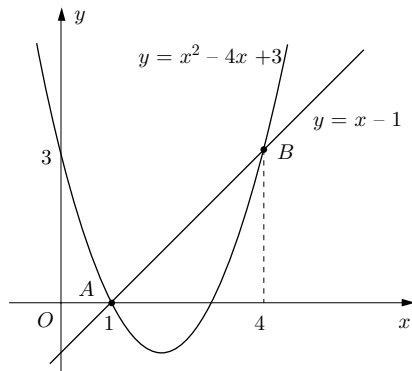
$$x - 1 = x^2 - 4x + 3, \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

(equazione risolvente);

$$\begin{aligned} x &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \\ &= \begin{cases} x_1 = 1 \implies y_1 = 0 \\ x_2 = 4 \implies y_2 = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Intersezioni: $A(1, 0)$ $B(4, 3)$.

In questo caso la retta è *secante* la parabola.



$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

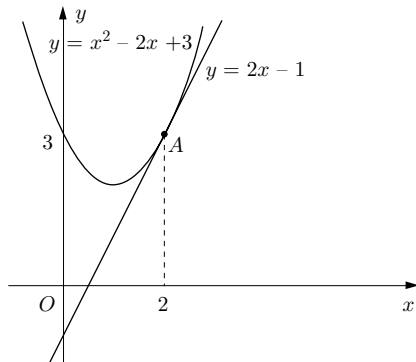
$$2x - 1 = x^2 - 2x + 3,$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

(equazione risolvente),

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{1}; \quad x_1 = x_2 = 2,$$

$$y_1 \equiv y_2 = 3; \quad A(2, 3).$$



In questo caso la retta è *tangente* alla parabola.

$$\begin{cases} y = 4x - x^2 + 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

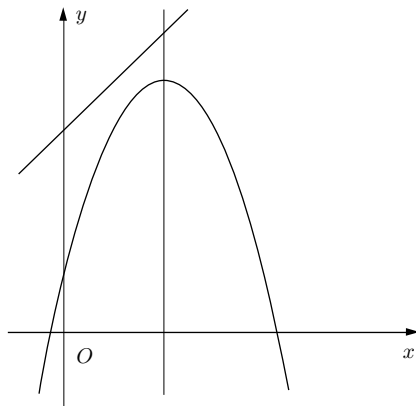
$$x + 4 = 4x - x^2 + 1$$

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

(equazione risolvente),

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2}.$$

La retta e la parabola non hanno punti di intersezione. La retta, in questo caso, è *esterna* alla parabola.



Una retta è secante, tangente o esterna ad una parabola assegnata, a seconda che il discriminante Δ dell'equazione risolvente sia positivo, nullo o negativo.

La parabola divide il piano in due parti; è *esterna* quella non contenente il fuoco.

4.18 Retta tangente alla parabola in un suo punto

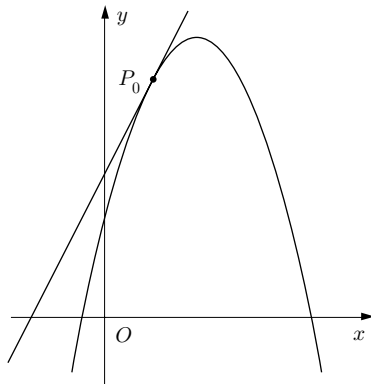
Per il punto $P_0(1, 5)$ della parabola

$$y = -x^2 + 4x + 2$$

si conduca la retta tangente.

Nel caso di un punto appartenente alla parabola, vi sono varie formule d'uso immediato. Indicando con

$$\begin{cases} x \longrightarrow \frac{x + x_0}{2}, & x^2 \longrightarrow xx_0, \\ y \longrightarrow \frac{y + y_0}{2}, & y^2 \longrightarrow yy_0, \\ xy \longrightarrow \frac{y_0x + x_0y}{2}, \end{cases}$$



le sostituzioni da effettuare sull'equazione della parabola (dette *formule di sdoppiamento*), si ha l'equazione della retta tangente per P_0

$$\frac{y + y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x + x_0}{2} + c.$$

Si può, tuttavia, sfruttare la condizione vista poco fa, che debba essere *nullo* il discriminante dell'equazione risolvente del sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

tra l'equazione della parabola e quella della retta generica per il punto P_0 .

Nel caso proposto si ha:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 2 \\ y - 5 = m(x - 1) \end{cases}$$

Si ha, per differenza:

$$x^2 + (m - 4)x + 3 - m = 0.$$

La condizione di tangenza impone:

$$\Delta \equiv (m - 4)^2 - 4(3 - m) = 0$$

ovvero

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \implies m_1 \equiv m_2 = 2.$$

La retta tangente è dunque

$$y - 5 = 2(x - 1), \quad \text{ovvero} \quad y = 2x + 3.$$

4.19 Rette tangenti alla parabola condotte da un punto esterno

Rette tangenti alla parabola

$$y = -x^2 + 4x + 3,$$

condotte per il punto $P_0(3, 10)$.

In questo caso non sono applicabili le formule di sdoppiamento.

Si procede imponendo l'annullamento del discriminante nell'equazione risolvente del sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 3 \\ y - 10 = m(x - 3) \end{cases}$$

tra l'equazione della parabola e quella della retta generica per il punto P_0 .

Per differenza si trova

$$x^2 + (m - 4)x + 7 - 3m = 0, \quad \Delta = (m - 4)^2 - 4(7 - 3m) = 0, \quad m^2 + 4m - 12 = 0.$$

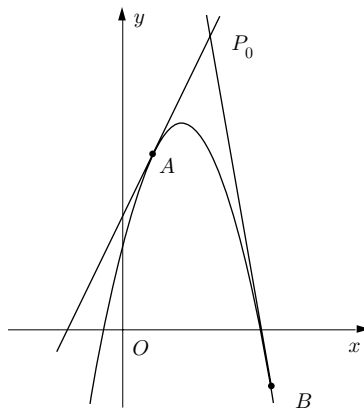
Quest'ultima equazione ammette le soluzioni

$$m_1 = 2, \quad m_2 = -6,$$

cosicché le rette tangenti cercate sono

$$y - 10 = 2(x - 3), \quad \text{ovvero} \quad y = 2x + 4,$$

$$y - 10 = -6(x - 3), \quad \text{ovvero} \quad y = -6x + 28.$$



Nella figura sono indicati i punti di tangenza, rispettivamente $A(1, 6)$, $B(5, -2)$.

Si può notare che per un punto appartenente alla parabola si può condurre una sola retta tangente, mentre per un punto *esterno* due.

4.20 Parabola con asse parallelo all'asse delle x

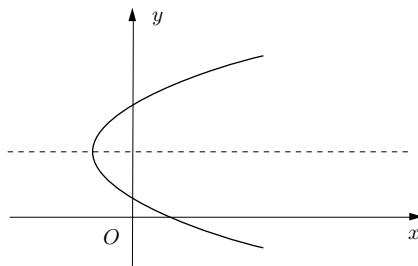
Tali parabole hanno equazione:

$$x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0$$

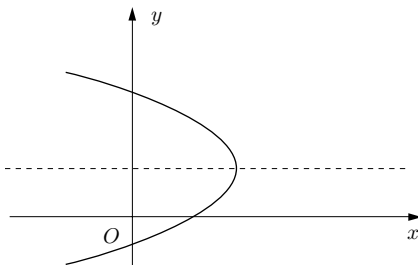
in cui, rispetto a quelle viste (con l'asse parallelo all'asse y), è scambiata la variabile y con la x , pertanto tutte le formule stabilite per quelle, restano valide per queste se si scambiano le ascisse con le ordinate.

Si ha precisamente:

$a > 0$ concavità a destra;



$a < 0$ concavità a sinistra;



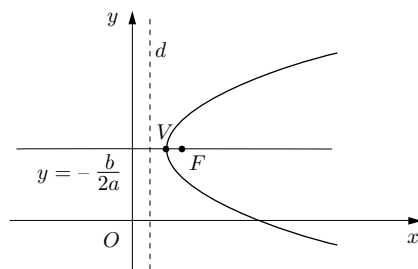
$$\text{Vertice } V \equiv \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right),$$

$$\Delta = b^2 - 4ac;$$

$$\text{asse, equazione } y = -\frac{b}{2a};$$

$$\text{Fuoco } F \equiv \left(\frac{1 - \Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right);$$

$$\text{direttrice } d, \text{ equazione } x = \frac{-1 - \Delta}{4a}.$$



I problemi relativi alle intersezioni con rette ed alla tangenza si trattano senza differenze sostanziali.

4.21 Proprietà geometriche delle parabole

Per le parabole valgono alcune notevoli proprietà:

PROPRIETÀ I - *I punti della parabola sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice.*

$$\overline{FV} = \overline{VH},$$

$$\overline{FP}_1 = \overline{P_1H_1},$$

$$\overline{FP}_2 = \overline{P_2H_2}.$$

Il rapporto $\overline{FP}/\overline{PH}$, con P sulla parabola, ha valore unitario e viene detto eccentricità della parabola.

Questa proprietà consente di dare una formula per scrivere l'equazione della parabola di assegnati fuoco e direttrice.

Nel caso in cui fuoco e direttrice siano individuati come segue (asse parallelo all'asse delle y):

$$F(x_0, y_0) \quad , \quad y = d,$$

l'equazione della parabola si esprime

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (y - d)^2.$$

Nel caso (asse parallelo all'asse delle x):

$$F(x_0, y_0) \quad , \quad x = d,$$

si ha

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x - d)^2.$$

Esempio

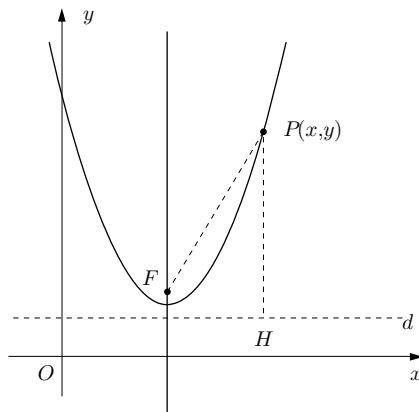
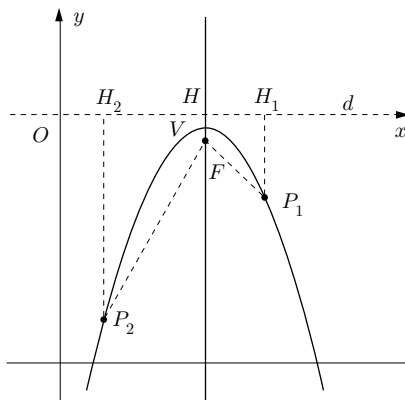
Si scriva l'equazione della parabola con fuoco $F(2, 5/4)$ e direttrice $y = 3/4$.

Dalla proprietà $\overline{PF} = \overline{PH}$, per ogni punto della parabola, segue $\overline{PF}^2 = \overline{PH}^2$, e passando alle coordinate:

$$(x - 2)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \left(y - \frac{3}{4}\right)^2$$

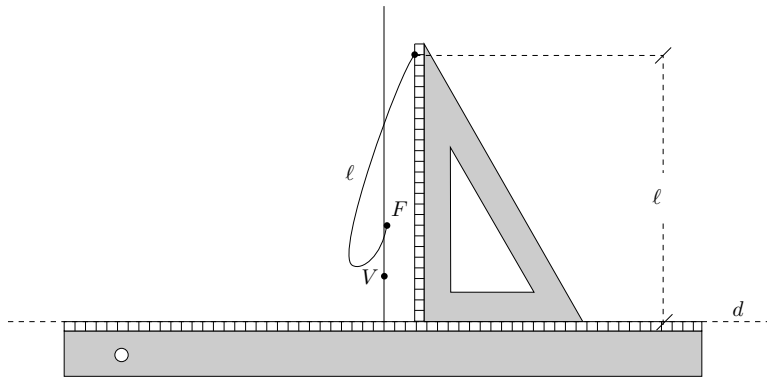
ovvero

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

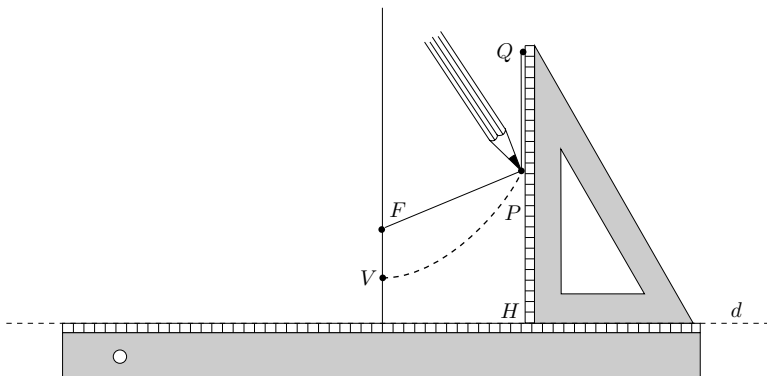


La proprietà enunciata consente di dare un metodo empirico per tracciare la parabola. Ci riferiamo alle figure sotto indicate.

Si fissino gli estremi di un filo *lungo quanto il lato* di una squadretta sul fuoco della parabola e all'estremità del lato della squadretta, dalla parte dell'angolo acuto; si disponga il lato della squadretta a cui è fissato il filo, sull'asse della parabola, e l'altro lato si appoggi su una riga fissata sulla direttrice.



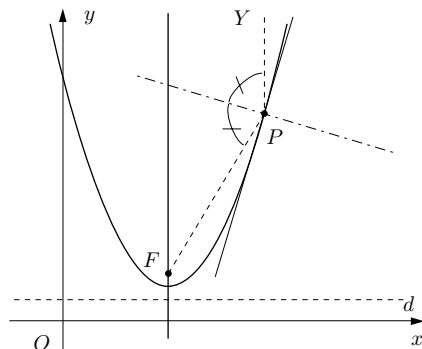
Se si mette in tensione il filo con una punta scrivente e si muove la squadretta in senso orizzontale mantenendo la punta scrivente accostata alla squadretta e in modo che il filo resti in tensione, la punta scrivente tratterà una parabola.



Poiché il filo QPF è lungo quanto QH , per ogni posizione di P sarà $\overline{FP} = \overline{PH}$, e pertanto il punto P apparterrà alla parabola di fuoco F e direttrice d .

PROPRIETÀ II - Se P è un qualunque punto della parabola, la retta normale alla tangente condotta in P (a tratto e punto in figura), è bisettrice dell'angolo formato dalle rette PF congiungente il punto col fuoco, e PY parallela per il punto P all'asse della parabola (tratteggiata in figura).

Questa proprietà è l'aspetto geometrico della ben nota proprietà degli specchi parabolici, con sorgente luminosa in F .



4.22 Circonferenza

La *circonferenza* è il luogo dei punti (di un piano) equidistanti da un punto (*centro*) fissato (sullo stesso piano).

La distanza, comune, dei punti della circonferenza dal centro, è detta *raggio*.

Detti $\mathcal{C}$ la circonferenza, C il centro, r il raggio, si ha:

$$P \in \mathcal{C} \iff \overline{PC} = r \iff \overline{PC}^2 = r^2$$

ovvero, ricordando la formula che dà la distanza di due punti,

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}.$$

La condizione trovata costituisce la condizione cui devono soddisfare le coordinate (x, y) affinché il punto P appartenga alla circonferenza $\mathcal{C}$, essa è l'*equazione della circonferenza*.

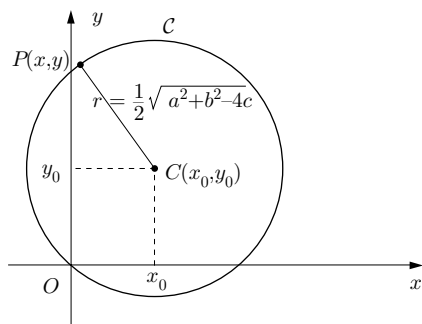
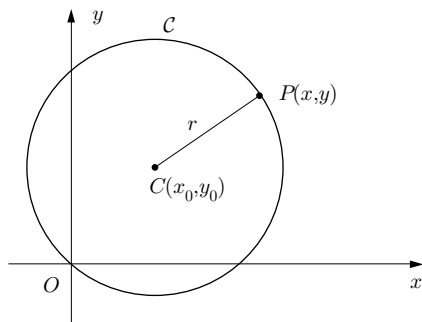
Lo sviluppo dell'espressione mostra alcune caratteristiche dell'equazione della circonferenza:

presenza del termine $x^2 + y^2$,
mancanza del termine xy (rettangolare);
pertanto la circonferenza ha la seguente equazione tipica:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

centro $C \equiv \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right),$

raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}.$

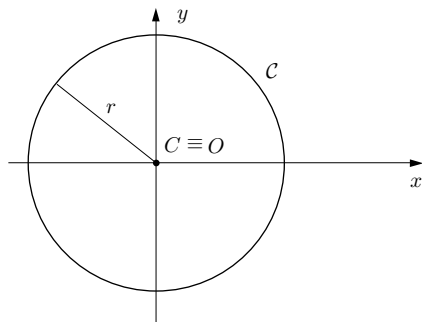


Circonferenze particolari

L'equazione

$$x^2 + y^2 = r^2$$

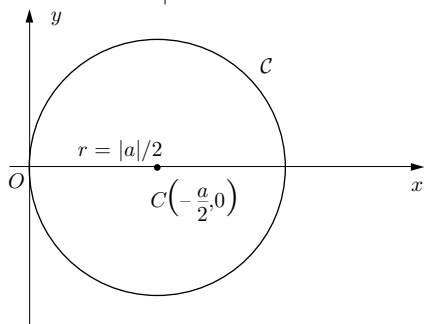
dà una circonferenza con centro nell'origine O e raggio r .



L'equazione

$$x^2 + y^2 + ax = 0$$

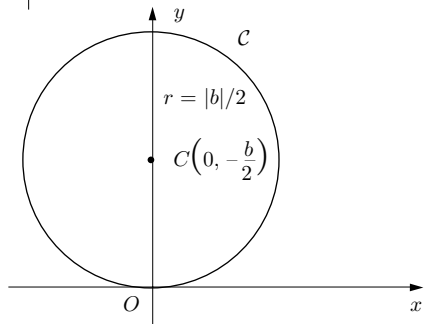
dà una circonferenza con centro nel punto $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ dell'asse delle x e raggio $|a|/2$. Passa per l'origine O .



Infine, l'equazione

$$x^2 + y^2 + by = 0$$

dà una circonferenza con centro nel punto $\left(0, -\frac{b}{2}\right)$ dell'asse delle y e raggio $|b|/2$. Passa per l'origine O .

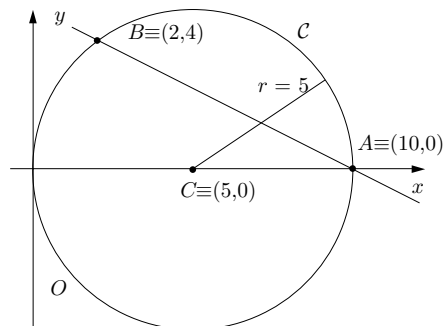


4.23 Retta e circonferenza

Le intersezioni tra una circonferenza ed una retta assegnate, si trovano risolvendo il sistema delle loro equazioni.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0 \\ x + 2y = 10, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - 2y \\ (10 - 2y)^2 + y^2 - 10(10 - 2y) = 0, \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = 10 - 2y \\ y^2 - 4y = 0 \end{cases} \implies y_1 = 0, \quad y_2 = 4.$$

Si hanno le intersezioni $A(10, 0)$ e $B(2, 4)$.

Nel caso esaminato le intersezioni tra la circonferenza e la retta sono reali e distinte; in tal caso la retta è detta *secante*.

Può accadere che le intersezioni siano reali e coincidenti o complesse coniugate; si parla allora rispettivamente di retta *tangente* o *esterna*.

I tre casi si verificano nell'ordine, a seconda che il discriminante Δ dell'equazione risolvete il sistema, sia positivo, nullo o negativo.

La condizione $\Delta = 0$ caratterizza dunque la tangenza tra circonferenza e retta.

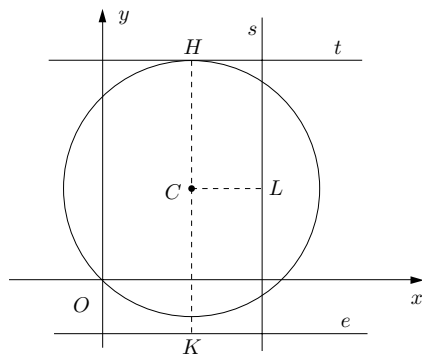
Rette secanti, tangenti, esterne possono essere caratterizzate, per altra via, tramite la distanza dal centro della circonferenza.

Si hanno infatti i seguenti casi:

retta *secante* (s): distanza dal centro ($\overline{CL}$) minore del raggio (della circonferenza);

retta *tangente* (t): distanza dal centro ($\overline{CH}$) uguale al raggio;

retta *esterna* (e): distanza dal centro ($\overline{CK}$) maggiore del raggio.



La tangenza può essere caratterizzata anche dalla condizione

$$\text{distanza}(\text{centro} - \text{retta}) = \text{raggio}.$$

4.24 Ricerca di rette tangenti

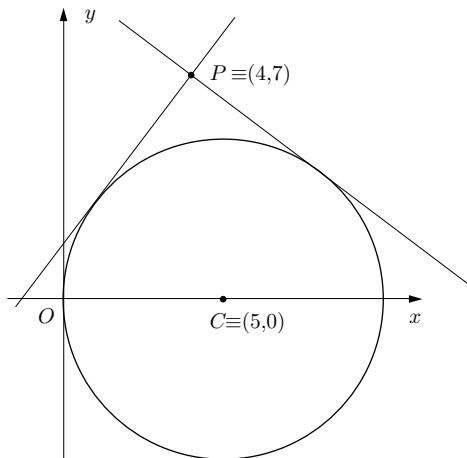
1° modo ($\Delta = 0$)

Per il punto $P(4, 7)$ si conducano le rette tangenti alla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 10x = 0.$$

La circonferenza, rappresentata in figura, ha centro $C \equiv (5, 0)$ e raggio 5 (passa per l'origine). La retta generica per il punto P ha equazione esplicita

$$y - 7 = m(x - 4).$$



Il sistema tra le equazioni della circonferenza e della retta si scrive

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0 \\ y = mx + 7 - 4m. \end{cases}$$

L'equazione risolvente è data da

$$x^2 + (mx + 7 - 4m)^2 - 10x = 0,$$

che semplificata dà

$$(1 + m^2)x^2 - 2(5 - 7m + 4m^2)x + (7 - 4m)^2 = 0.$$

La condizione di tangenza ($\Delta = 0$) impone

$$(5 - 7m + 4m^2)^2 - (1 + m^2)(49 - 56m + 16m^2) = 0$$

ovvero

$$12m^2 - 7m - 12 = 0$$

da cui segue: $m_1 = -\frac{3}{4}$, $m_2 = \frac{4}{3}$.

Le due rette tangenti cercate sono dunque (perpendicolari tra loro):

$$y - 7 = -\frac{3}{4}(x - 4) \quad , \quad y - 7 = \frac{4}{3}(x - 4).$$

2° modo

Si può procedere con la condizione

$$\text{distanza}(\text{centro} - \text{retta}) = \text{raggio};$$

la retta in questione è quella generica per il punto P , ovvero

$$y = mx + 7 - 4m$$

il centro è il punto $C(5, 0)$; la distanza di C dalla generica retta per P è data da

$$\frac{|0 - 5m - 7 + 4m|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

La condizione di tangenza impone che tale distanza sia uguale al raggio, cioè

$$\frac{|m + 7|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5.$$

Segue: $(m + 7)^2 = 25(m^2 + 1)$ da cui

$$12m^2 - 7m - 12 = 0.$$

Tale equazione è la stessa trovata procedendo nel 1° modo e conduce naturalmente agli stessi risultati trovati per quella via.

Se il punto per il quale si conduce la tangente appartiene alla circonferenza, si può usare la *formula di sdoppiamento*, già incontrata nel caso della parabola.

Esempio

Retta tangente nell'origine alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + y = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 &\longrightarrow 0 \cdot x, & y^2 &\longrightarrow 0 \cdot y, \\ x &\longrightarrow \frac{0+x}{2} = \frac{x}{2}, & y &\longrightarrow \frac{0+y}{2} = \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Si ottiene allora la retta tangente:

$$-4\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0, \quad \text{ovvero} \quad -4x + y = 0.$$

Si ha perciò la regola qui empiricamente verificata:

la retta tangente nell'origine ad una circonferenza si ottiene uguagliando a zero i termini di primo grado dell'equazione della circonferenza.

La regola si estende alla parabola all'ellisse ed all'iperbole.

4.25 Ellisse

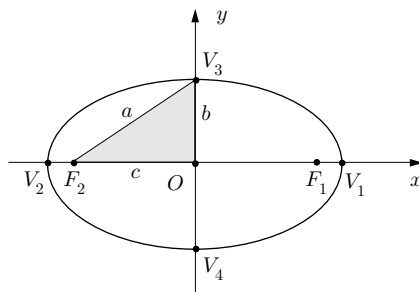
L'ellisse ha l'equazione (canonica)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Interseca gli assi coordinati nei punti:

$$\begin{aligned} V_1(a, 0), \quad V_2(-a, 0), \\ V_3(0, b), \quad V_4(0, -b), \end{aligned}$$

detti *vertici*. Supporremo sempre $a > 0$,
 $b > 0$.



L'origine è il *centro* dell'ellisse. I segmenti OV_1 , OV_2 , di misura a , OV_3 ed OV_4 , di misura b , sono detti *semiassi*; i segmenti V_1V_2 , V_3V_4 sono detti *assi*; il maggiore dei due è l'*asse focale*, su di esso si trovano i fuochi F_1 ed F_2 a distanza $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ dal centro O .

Nell'ellisse della figura l'asse focale è quello sull'asse delle x ed i fuochi hanno le coordinate $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$.

4.26 Proprietà geometriche dell'ellisse*1. Ellisse come luogo geometrico*

Se P è un punto dell'ellisse $\mathcal{E}$, la somma delle sue distanze dai fuochi è uguale alla lunghezza dell'asse maggiore.

In simboli

$$P \in \mathcal{E} \iff \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

La proprietà si prova sostituendo le distanze⁽¹⁾; si ottiene:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a;$$

portando il secondo radicale al secondo membro, quadrando (con precauzione) e semplificando, segue:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx;$$

ancora quadrando si ha:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2);$$

dividendo per $a^2(a^2 - c^2)$ ciascun termine, si ha ancora,

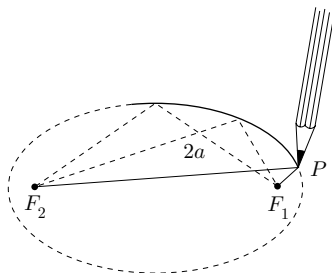
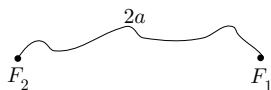
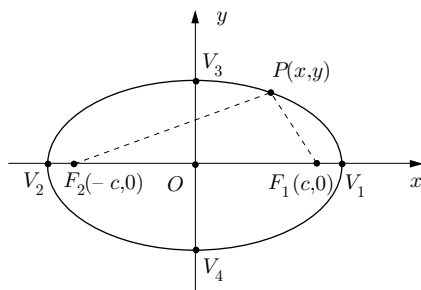
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \quad \text{da cui segue} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ricordando che si ha: $a^2 - c^2 = b^2 \neq 0$.

La proprietà consente di tracciare il grafico dell'ellisse con un metodo assai semplice, detto "del giardiniere", perché si ritiene che le aiuole nelle antiche città greche, fossero tracciate così.

Si fissano gli estremi di un filo di lunghezza $2a$ nei fuochi ($2a > \overline{F_1F_2}$), e si mette in tensione il filo con una punta scrivente.

Se si muove in giro la punta scrivente mantenendo il filo in tensione, si traccia un'ellisse. Si mantiene infatti costante, uguale alla lunghezza del filo, la somma delle distanze di un punto qualunque dell'ellisse dai due fuochi.



2. Un'altra costruzione grafica

Si tracciano le due circonferenze di centro O e raggi uguali ai semiasse dell'ellisse a e b . (Si supponga il semiasse maggiore sull'asse delle x , cioè $a > b$).

Si individuano subito i quattro vertici.

Si conduce per l'origine una semiretta, e si indichino con B e A rispettivamente, i punti in cui essa incontra la circonferenza di raggio b e quella di raggio a .

⁽¹⁾Nei calcoli si fa riferimento all'ellisse in figura.

Si conducano la verticale per A e l'orizzontale per B ; il loro punto d'incontro P appartiene all'ellisse.

L'ascissa x del punto P è uguale all'ascissa di A data da (vedi § 7.6)

$$x = \overline{OA} \cos \widehat{HOA} = a \cos \alpha,$$

(si osservi il triangolo rettangolo OHA della figura); l'ordinata y di P , uguale a quella di B , è data da

$$y = \overline{OB} \sin \widehat{OBK} = b \sin \alpha.$$

Si ha allora

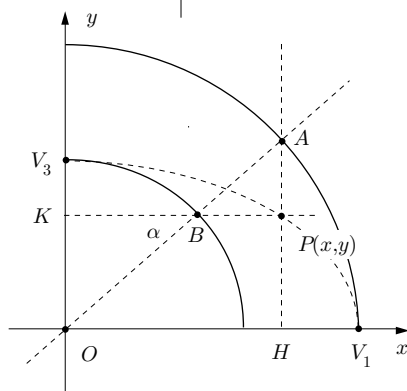
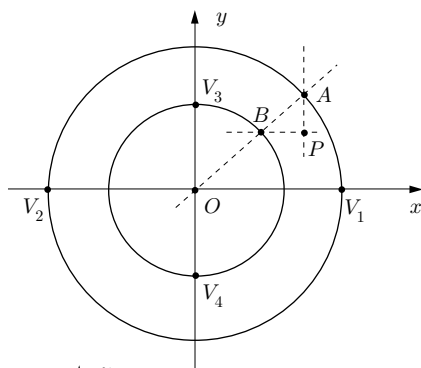
$$\frac{x}{a} = \cos \alpha, \quad \frac{y}{b} = \sin \alpha.$$

Quadrando e sommando membro a membro, poiché $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \forall \alpha$, si ha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che prova l'appartenenza di P all'ellisse, per il fatto che le sue coordinate ne verificano l'equazione.

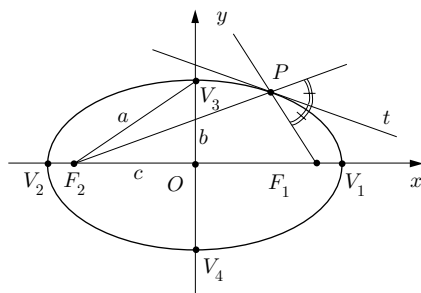
È evidente che per $a = b = r$ si ha una circonferenza di centro O e raggio r .



3. Una proprietà delle rette tangenti

La retta tangente condotta per un qualunque punto P dell'ellisse, è bisettrice di due degli angoli formati dalle rette congiungenti P con i fuochi⁽²⁾.

Non ci soffermeremo su tale proprietà, qui esposta senza verifica.



⁽²⁾La dimostrazione di questa proprietà richiede nozioni che vengono usualmente date in un corso universitario di Geometria.

4.27 Iperbole

L'iperbole ha l'equazione (canonica)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Essa interseca gli assi cartesiani nei punti

$$V_1(a, 0), \quad V_2(-a, 0),$$

detti *vertici*. Supporremo $a > 0, b > 0$.

L'origine è il *centro* dell'iperbole. I segmenti OV_1, OV_2 , di misura a , sono detti *semiassi*, il segmento V_1V_2 *asse reale*. Il segmento V_3V_4 di misura $2b$ è detto *asse immaginario*. Le rette r ed s , diagonali del rettangolo di figura (avente i lati di misura $2a$ e $2b$) sono dette *asintoti*, le loro equazioni sono:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad \frac{x}{a} = -\frac{y}{b}.$$

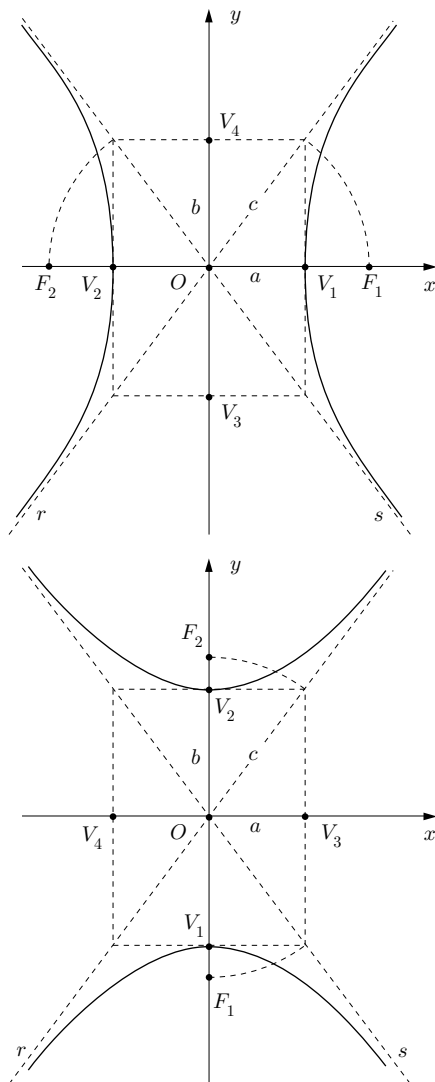
Sull'asse reale si trovano i fuochi F_1 ed F_2 a distanza $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ dal centro O .

L'asse reale, su cui si trovano i fuochi, è detto anche *asse focale*.

In modo analogo l'iperbole di equazione

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

ha l'asse focale sull'asse delle y ; il suo grafico è quello della figura accanto.



4.28 Iperbole equilatera

L'iperbole nella quale risulta

$$b \equiv a$$

è detta *equilatera*; essa ha gli asintoti perpendicolari tra loro, coincidenti con le bisettrici dei quadranti

$$y = x, \quad y = -x.$$

L'equazione dell'iperbole equilatera può scriversi

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

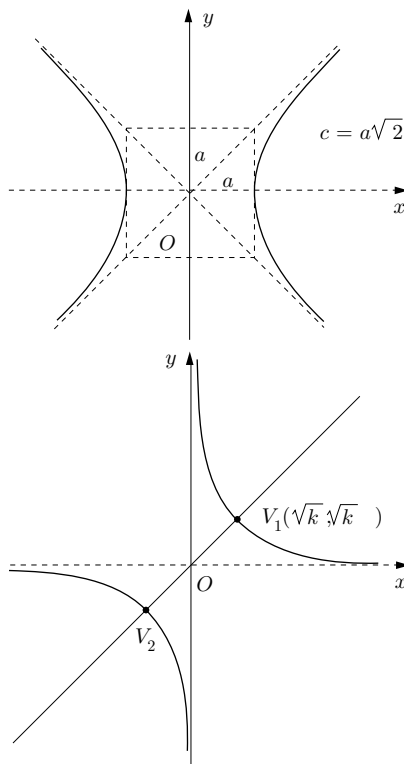
L'iperbole equilatera ha un'altra forma canonica, quella in cui gli asintoti costituiscono gli assi del riferimento cartesiano.

In questo caso l'equazione è

$$xy = k$$

e la curva ha grafico nel 1° e 3° quadrante, come nella figura, per $k > 0$; mentre per $k < 0$ ha grafico nel 2° e 4° quadrante.

Nell'iperbole equilatera rappresentata in figura ($k > 0$), i vertici ed i fuochi si trovano sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante, a distanza $\sqrt{2k}$ e $2\sqrt{k}$ dall'origine (centro dell'iperbole), nell'ordine.



4.29 Proprietà geometriche dell'iperbole

1. Iperbole come luogo geometrico

Se P è un punto dell'iperbole $\mathcal{I}$, la “differenza” delle sue distanze dai fuochi è uguale alla misura dell'asse reale.

In simboli

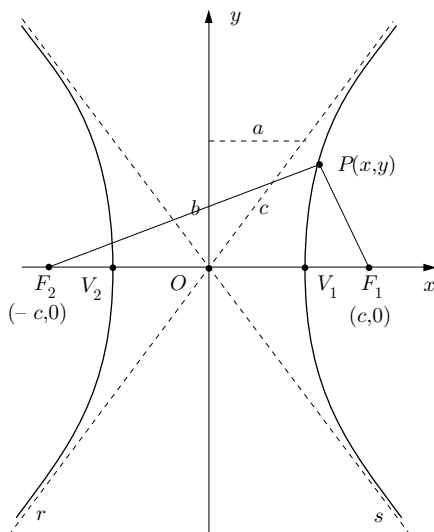
$$P \in \mathcal{I} \iff |\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2| = 2a.$$

Passando alle distanze si ottiene:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a;$$

portando il secondo radicale al secondo membro, quadrando (con precauzione) e semplificando, segue:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx;$$



ancora quadrando e riordinando i termini, si ha:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

dividendo ciascun termine per $a^2(c^2 - a^2)$, e ricordando che si ha $c^2 - a^2 = b^2$, segue infine la forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. Una proprietà delle rette tangenti

Il punto di tangenza P è il punto medio del segmento MN intercettato dagli asintoti sulla retta tangente.

La proprietà è valida per qualunque iperbole.

Per esercizio verrà mostrata nel caso di un'iperbole equilatera $xy = k$.

Sia il punto di tangenza $P_0(x_0, y_0)$;
l'equazione della retta tangente si scrive
(con la formula di sdoppiamento del
§ 4.18)

$$\frac{y_0x + x_0y}{2} = k$$

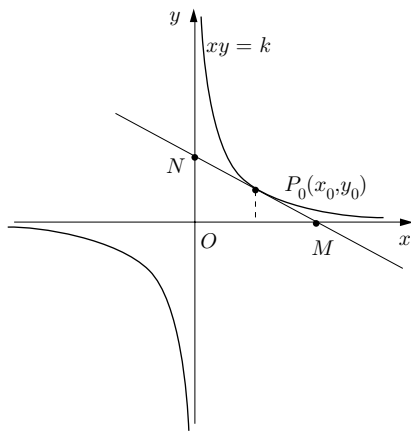
ovvero, poiché è $x_0y_0 = k$,

$$y_0x + x_0y = 2x_0y_0.$$

Intersecando con gli asintoti (assi coordinati), si ottiene:

$$\begin{cases} y_0x + x_0y = 2x_0y_0 \\ y = 0 \end{cases} \implies M(2x_0, 0)$$

$$\begin{cases} y_0x + x_0y = 2x_0y_0 \\ x = 0 \end{cases} \implies N(0, 2y_0).$$



Rileviamo che le formule di sdoppiamento del § 4.18, si possono applicare per determinare la retta tangente ad un'ellisse (circonferenza), un'iperbole, una parabola, assegnato che sia il punto $P_0(x_0, y_0)$ di tangenza.

5. FAMIGLIE DI FUNZIONI ELEMENTARI

Verranno dati i grafici delle seguenti funzioni “elementari”

$$x^\alpha, \quad \frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0; \quad a^x, \quad \log_a x, \quad a > 0 \quad a \neq 1; \quad a \sin bx;$$

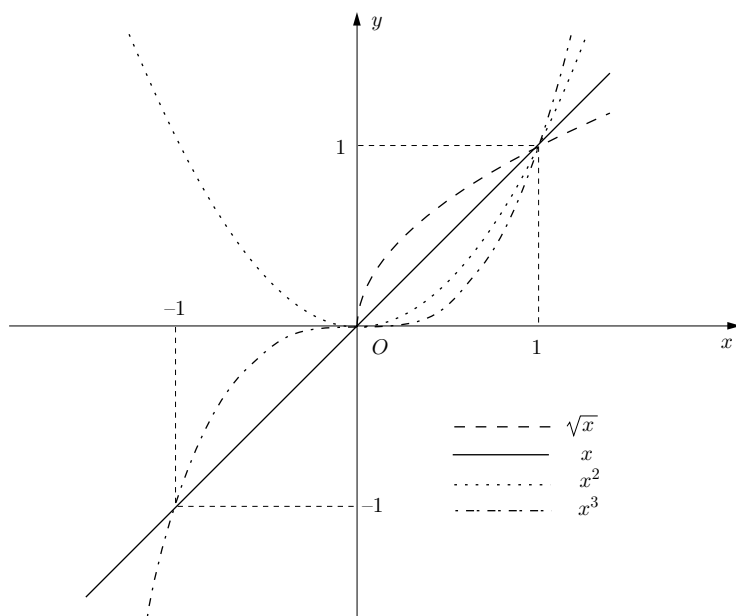
esponendo il comportamento al variare del parametro:

α per i monomi ed i loro reciproci,

a per le funzioni esponenziali e logaritmiche,

a, b per quelle circolari.

5.1 La famiglia $y = x^\alpha$



Le funzioni x^α

Le funzioni della famiglia x^α , per $x \geq 0$, passano per l'origine ed il punto $(1, 1)$.

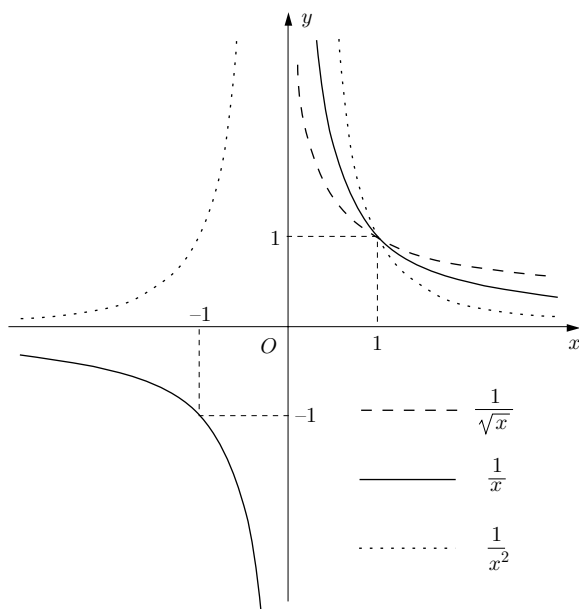
Se α è intero e *pari* il loro grafico risulta simmetrico rispetto all'asse delle y .

Se α è intero e *dispari* il loro grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi⁽¹⁾.

All'aumentare di α il grafico della funzione si abbassa sempre più sull'asse delle ascisse per valori della x con $0 < x < 1$, mentre si alza più rapidamente per valori maggiori dell'unità; in sostanza i grafici si scavalcano nel punto $(1, 1)$.

La funzione $\sqrt{x}$ è definita solo per valori non negativi della x .

5.2 La famiglia $y = \frac{1}{x^\alpha}$



Le funzioni $\frac{1}{x^\alpha}$

⁽¹⁾In generale viene detta *pari*, ogni funzione $f(x)$ per la quale si ha

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in I_f, \quad \text{con} \quad -x \in I_f;$$

e *dispari* se si ha

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in I_f, \quad \text{con} \quad -x \in I_f.$$

Le funzioni della famiglia $\frac{1}{x^\alpha}$, con $x > 0$, passano per il punto $(1, 1)$ ove si scavalcano; quelle relative a valori di α più grandi si avvicinano più rapidamente all'asse delle x , per valori della x maggiori dell'unità, mentre si alzano più rapidamente per valori della x con $0 < x < 1$.

L'asse delle y è un asintoto verticale per tutte, mentre l'asse delle x è un asintoto orizzontale.

Quelle relative ad un valore (intero) *pari* di α , sono simmetriche rispetto all'asse delle y , quelle relative a valori *dispari* di α sono simmetriche rispetto all'origine.

La funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è definita solo per valori positivi di x .

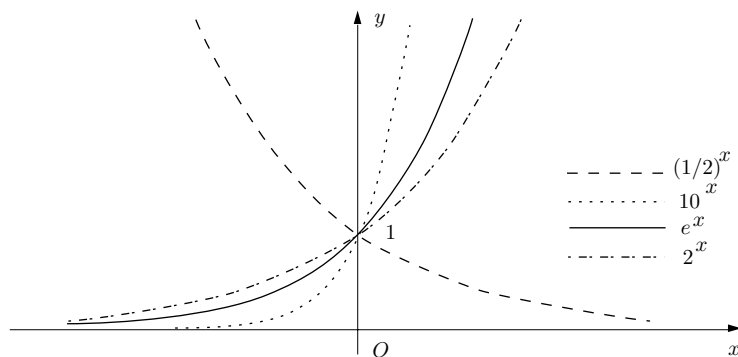
5.3 La famiglia $y = a^x$

Le funzioni della famiglia a^x , $a > 0$ $a \neq 1^{(2)}$ sono a valori positivi.

Passano tutte per il punto $(0, 1)$ e risultano *crescenti* per $a > 1$ (cioè tali che $a^{x_2} > a^{x_1} \quad \forall x_2 > x_1$) e *decrescenti* per $a < 1$.

Ammettono l'asse delle x come asintoto orizzontale a sinistra o a destra.

Il loro grafico tende ad appiattirsi per valori di a prossimi all'unità.



Le funzioni esponenziali

In matematica ha notevole importanza la funzione e^x in cui la base è il numero di Nepero (e sta per Eulero) e , irrazionale trascendente, le cui prime cifre sono (con 15 decimali esatti)

$$e = 2,718281828459045 \dots$$

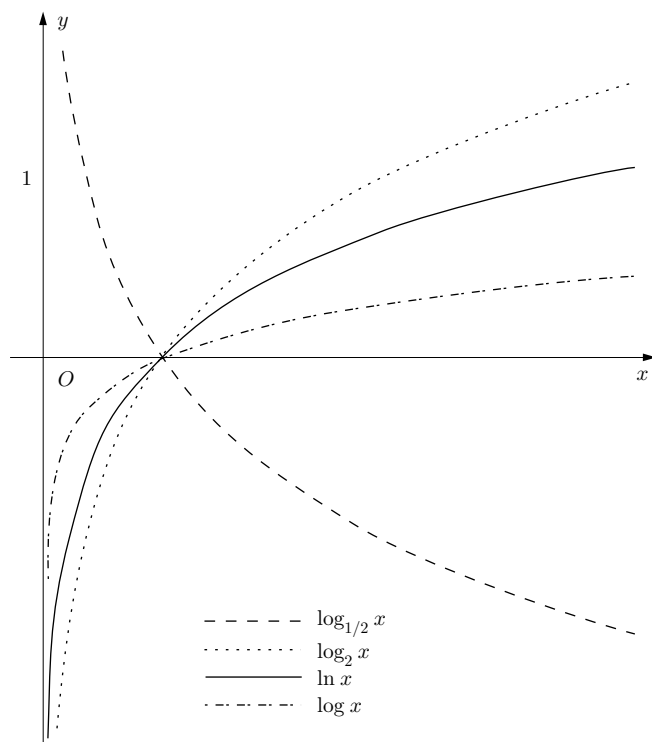
⁽²⁾Per $a = 1$ si ha banalmente la funzione costante $y = 1$.

5.4 La famiglia $y = \log_a x$

Le funzioni della famiglia $\log_a x$ sono definite per valori positivi della x ; ammettono l'asse delle y come asintoto verticale e passano tutte per il punto $(1, 0)$ ove si scavalcano.

Le curve della famiglia relative a valori di a (detta base del logaritmo) maggiori dell'unità sono *crescenti* mentre per $0 < a < 1$ sono *decrescenti*; assumono valore uno in corrispondenza al valore $x = a$ (uguale alla base). Per $a > 1$, pertanto, risultano crescenti tanto meno, quanto più a è grande.

Tra le curve della famiglia hanno importanza quella in base e , detta *logaritmo naturale* o *neperiano* ed indicata con $\ln x$, e quella in base 10, detta *logaritmo decimale* o *volgare* o di Briggs ed indicata semplicemente con $\log x$ (sottintendendo la base).



Le funzioni logaritmiche

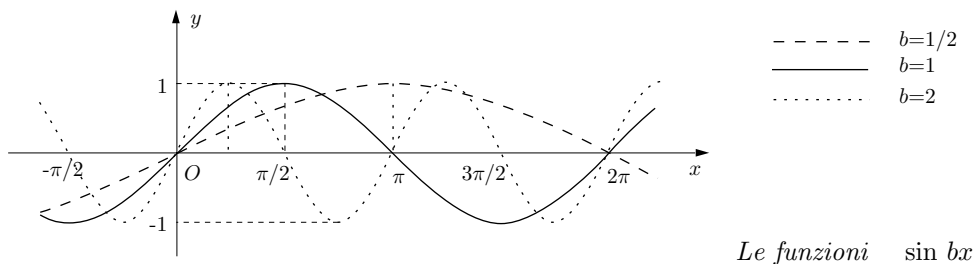
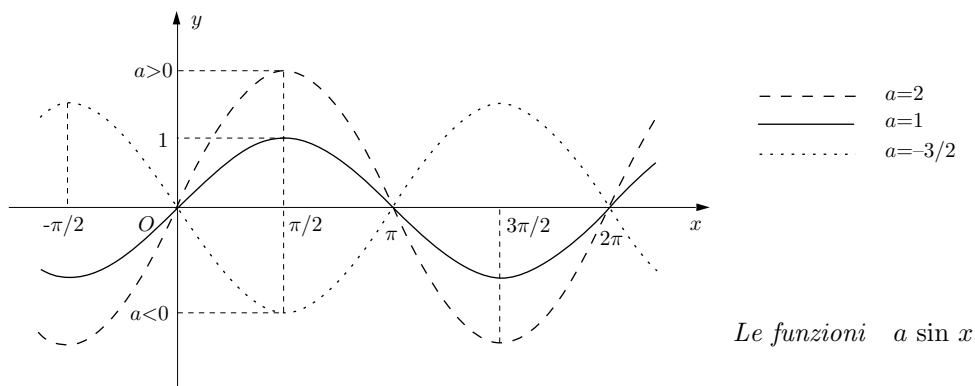
Conviene avvertire il lettore che, nei successivi sviluppi della matematica, la notazione $\log x$ così come $\ln x$ indicherà i logaritmi naturali; per quelli volgari si scriverà $\log_{10} x$.

5.5 Le funzioni $y = a \sin bx$

La funzione $\sin x$ è periodica, con periodo 2π , e dispari; relativamente al tratto dell'intervallo $[0, 2\pi]$ assume valore *massimo*, unitario, per $x = \frac{\pi}{2}$ e valore *minimo*, uguale a -1 , per $x = \frac{3}{2}\pi$; si annulla per $x = 0, \pi, 2\pi$ (vedi § 7.3). È una funzione dispari, nel senso che si ha

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

La funzione $a \sin x$, si annulla per gli stessi valori $x = 0, \pi, 2\pi$; per a positivo ha *massimo*, di valore uguale ad a , per $x = \frac{\pi}{2}$ e *minimo*, di valore $-a$, per $x = \frac{3}{2}\pi$; per a negativo ha invece *minimo*, di valore a , per $x = \frac{\pi}{2}$ e *massimo*, di valore $-a$, per $x = \frac{3}{2}\pi$.



La funzione $a \sin bx$, con $b > 0$, presenta lo stesso andamento (sequenza di massimi e minimi) della funzione $a \sin x$, ma ha periodo $\frac{2\pi}{b}$, pertanto il suo grafico risulta *compresso*, rispetto a quello di $a \sin x$, per $b > 1$ ed *espanso* per $b < 1$.

6. DISEQUAZIONI

La conoscenza delle disequazioni è indispensabile per affrontare lo studio della Matematica e delle sue applicazioni.

Verranno qui richiamate le regole basilari, facendo uso di una tecnica grafica.

6.1 Disequazioni nella forma $f(x) \geq 0$

Sia da risolvere la disequazione

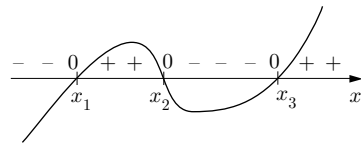
$$f(x) \geq 0,$$

e si suppongano noti, nel piano xy , il grafico della funzione $y = f(x)$ e le ascisse dei punti di intersezione di esso con l'asse delle x .

Allora è ovvio quale sia il segno delle ordinate $f(x)$, e quale la soluzione.

Se $f(x)$ ha il grafico rappresentato in figura, il segno delle ordinate è quello indicato, e la soluzione è data da:

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad , \quad x \geq x_3 .$$



Il fatto è che non sempre è noto il grafico della $f(x)$; precisamente lo è nel caso di funzioni lineari (rette) o di secondo grado (parabole), logaritmiche o esponenziali, circolari (seno, coseno, tangente). Verrà esposto qui di seguito come si possa, a partire da funzioni semplici, come quelle indicate, risolvere disequazioni con funzioni più complesse.

6.2 Disequazioni lineari e quadratiche

Sono dette *lineari* le disequazioni, nell'incognita x , del tipo:

$$mx + q > 0 .$$

La loro risoluzione si può effettuare pensando al grafico della retta $y = mx + q$.

Si distinguono i casi seguenti:

$m > 0$	$m < 0$

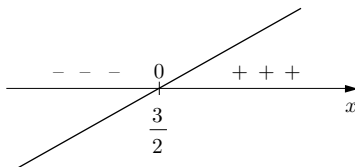
che conducono ai rispettivi risultati:

$$x > -\frac{q}{m},$$

$$x < -\frac{q}{m}.$$

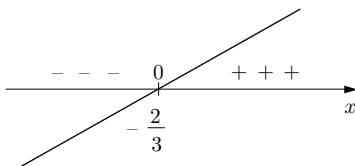
Esempi

$$2x - 3 > 0$$



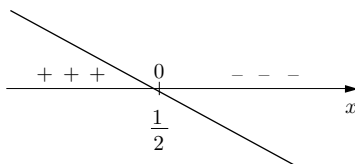
$$x > \frac{3}{2},$$

$$2 + 3x > 0$$



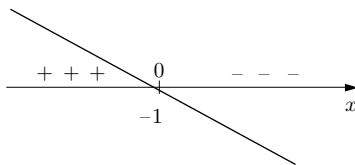
$$x > -\frac{2}{3},$$

$$1 - 2x > 0$$



$$x < \frac{1}{2},$$

$$-1 - x > 0$$



$$x < -1.$$

Sono dette *quadratiche* le disequazioni, nell'incognita x , del tipo:

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Queste si possono risolvere pensando al grafico della parabola: $y = ax^2 + bx + c$.

Si distinguono i casi seguenti qui riportati sinteticamente:

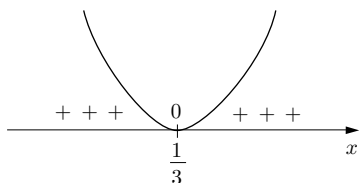
	$a > 0$ (concavita' in alto)	$a < 0$ (concavita' in basso)
$\Delta > 0$ soluzioni reali e distinte		
$\Delta = 0$ soluzioni reali e coincid.		
$\Delta < 0$ soluzioni complesse coniugate		

Esempi

$4x^2 - 5x + 1 \geq 0$ $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ 1 \end{array} \right.$ Soluzione: $x \leq \frac{1}{4}, \quad x \geq 1$	$5x - x^2 \geq 0$ $x(5 - x) \geq 0$ Soluzione: $0 \leq x \leq 5$
--	---

$$9x^2 - 6x + 1 > 0$$

$$(3x - 1)^2 > 0$$

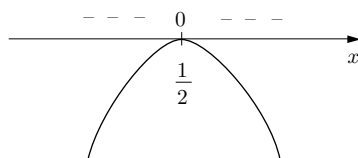


Soluzione:

$$x < \frac{1}{3}, \quad x > \frac{1}{3} \implies x \neq \frac{1}{3}$$

$$4x - 1 - 4x^2 \geq 0$$

$$-(2x - 1)^2 \geq 0$$



Soluzione:

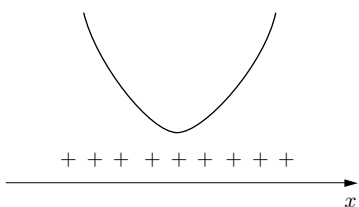
$$x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 2x + 4 > 0$$

L'equazione associata è

$$x^2 + 2x + 4 = 0;$$

essa non ha soluzioni reali



Soluzione:

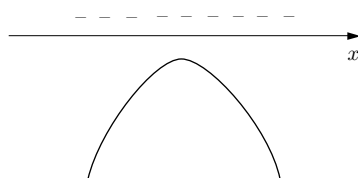
$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$2x - x^2 - 4 \geq 0$$

L'equazione associata è

$$-x^2 + 2x - 4 = 0;$$

essa non ha soluzioni reali



Soluzione:

$$\text{nessuna: } x \in \emptyset$$

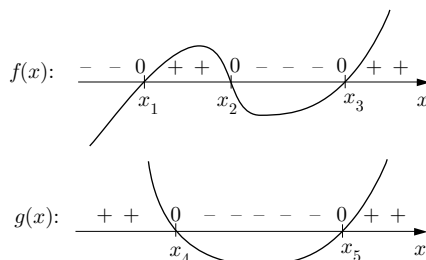
6.3 Il caso del prodotto

Sia da risolvere la disequazione

$$f(x) \cdot g(x) \geq 0$$

supponendo noti i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ e le relative intersezioni con l'asse delle x .

Il segno del prodotto si deduce applicando la ben nota regola dei segni. A tale scopo si riuniscono i segni trovati in un unico schema mettendo i punti di intersezione con l'asse delle x delle due funzioni disposti in ordine crescente: $x_1 < x_4 < x_2 < x_5 < x_3$.



	x_1	x_4	x_2	x_5	x_3	
$f(x):$	-	0	+	+	+	+
$g(x):$	+	+	0	-	-	+
$f(x) \cdot g(x):$	-	0	+	+	0	+

l'ultima riga, dedotta, come si è detto, con la regola dei segni, consente di leggere la soluzione della disequazione, che sarà, nel caso in esame:

$$x_1 \leq x \leq x_4 \quad , \quad x_2 \leq x \leq x_5 \quad , \quad x \geq x_3 .$$

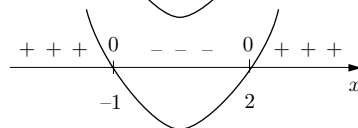
Esempio 1

$$(x^2 - 1)(x^2 - x - 2) \geq 0 .$$

Studio del segno di $x^2 - 1$:



Studio del segno di $x^2 - x - 2$:



Schema riassuntivo:	-1	1	2	
$x^2 - 1 :$	+	0	-	+
$x^2 - x - 2 :$	+	0	-	+
prodotto:	+	0	-	+

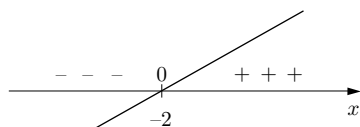
Soluzione: $x \leq -1 \quad , \quad x \geq 2 .$

Il procedimento si può applicare nel caso di prodotto (quoziente) con più fattori.

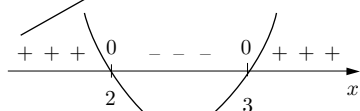
Esempio 2

$$\frac{(x+2)(x^2-5x+6)}{x^2-1} \geq 0.$$

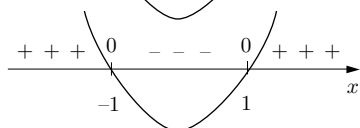
Studio del segno di $x+2$:



Studio del segno di $x^2 - 5x + 6$:



Studio del segno di $x^2 - 1$:



Schema riassuntivo:

		-2	-1	1	2	3	
Num.:	$x+2$:	-	-	0	+	+	+
	x^2-5x+6 :	+	+	+	+	0	-
Den.:	x^2-1 :	+	+	+	0	-	-
		+	+	0	-	-	0
Frazione:		-	-	0	+	+	+
		+	+	+	+	0	-
		+	+	0	-	-	0
		+	+	+	+	+	+

Nel caso delle disequazioni fratte torna utile separare il numeratore dal denominatore, perché lo zero a numeratore comporta uno zero per la frazione, mentre uno zero del denominatore manda, per così dire, la frazione “all’infinito” (∞), a meno che non vada a zero anche il numeratore; in quest’ultimo caso si ha una “forma indeterminata” che verrà indicata con un punto interrogativo.

Risoluzione della prima.

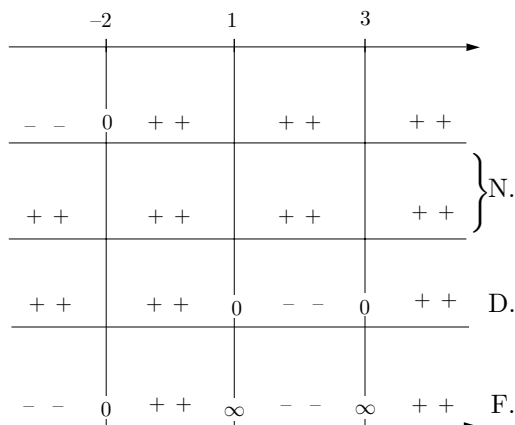
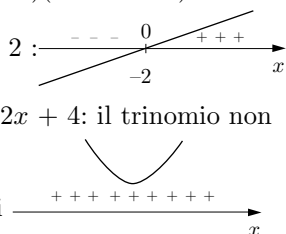
Studio del segno di $x^3 + 8$:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

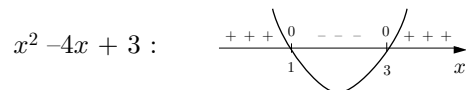
segno di $x + 2$:

segno di $x^2 - 2x + 4$: il trinomio non

ha radici reali



Segno del denominatore:



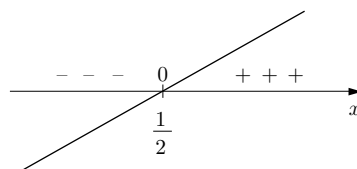
Soluzioni

$$-2 \leq x < 1, \quad x > 3.$$

Risoluzione della seconda.

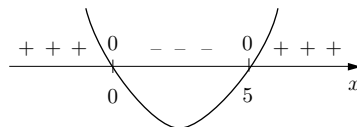
Studio del segno di $2x - 1 \geq 0$

Soluzioni: $x \geq 1/2$.



Risoluzione della terza.

Studio del segno di $x^2 - 5x \leq 0$

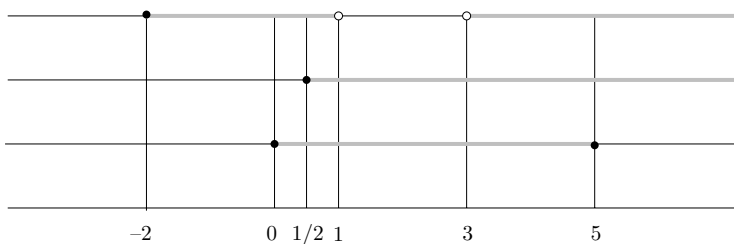


Si riportano ora le soluzioni di ciascuna equazione in uno stesso schema, in modo da poter leggere agevolmente la soluzione comune.

1^a disequazione

2^a disequazione

3^a disequazione



La soluzione del sistema è: $\frac{1}{2} \leq x < 1, \quad 3 < x \leq 5$.

Si noti che il punto pieno $\bullet$ indica che il valore numerico relativo è *incluso*, il punto vuoto $\circ$ che è *escluso*.

6.5 Disequazioni equivalenti

Non tutte le disequazioni si presentano nella forma $f(x) \geq 0$; è opportuno allora conoscere quali operazioni facciano passare da una qualunque disequazione data ad una del tipo $f(x) \geq 0$, conservando le soluzioni.

Le regole pratiche usate nascono dalle seguenti considerazioni assai generali.

1) Su ciascun membro della disequazione si possono eseguire tutte quelle operazioni che non ne alterano il valore. Da ciò segue che

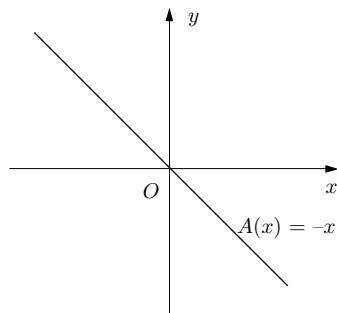
- si possono eseguire i calcoli indicati,
- si può aggiungere e togliere la stessa quantità o moltiplicare e dividere per quantità non nulle.

2) Da $a(x) \geq b(x)$ segue $\begin{cases} A[a(x)] \geq A[b(x)] & \text{se } A(x) \text{ è crescente} \\ A[a(x)] \leq A[b(x)] & \text{se } A(x) \text{ è decrescente} \end{cases}$

ciò vuol dire che su ambo i membri della disequazione si possono eseguire le stesse operazioni, espresse dalla funzione *monotona*⁽¹⁾ A , nello stesso ordine, facendo attenzione se si debba o meno invertire il segno di disuguaglianza.

Da ciò segue in particolare che

- si possono portare termini da un membro all'altro cambiandoli di segno,
- si possono moltiplicare o dividere ambo i membri della disequazione per una quantità di segno costante, senza invertire la disuguaglianza se il segno è *positivo*, invertendo invece la disuguaglianza se il segno è *negativo*; in particolare cambiare il segno ad ambo i membri equivale a passare da $a(x)$ a $-a(x)$ e da $b(x)$ a $-b(x)$; in tal caso si applica la funzione $A(x)$ che fa passare da x a $-x$, cioè $A(x) = -x$ che è monotona decrescente e comporta pertanto che si debba invertire la disuguaglianza.



⁽¹⁾Dire che $A(x)$ è *crescente* significa che $\forall x', x''$ ammissibili con $x' < x''$ si ha $A(x') < A(x'')$. Per le *decrescenti* si ha $A(x') > A(x'')$. Funzioni di questo tipo, anche con disuguaglianze attenuate, si dicono *monotone*.

Esempio 1

$$\ln(x-3) > -1.$$

Per liberare l'incognita, $x-3$, dal logaritmo, si passa agli esponenziali su ambo i membri,

$$e^{\ln(x-3)} > e^{-1}$$

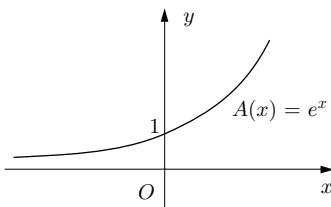
poiché l'esponenziale $A(x) = e^x$ è funzione *monotona crescente*, non si è invertito il verso della disuguaglianza.

Segue allora:

$$x-3 > e^{-1},$$

da cui si ha la soluzione:

$$x > 3 + \frac{1}{e}.$$

**Esempio 2**

$$e^{2x-1} \leq 1.$$

Per liberare l'incognita dall'esponenziale, si passa al logaritmo naturale su ambo i membri

$$\ln e^{2x-1} \leq \ln 1.$$

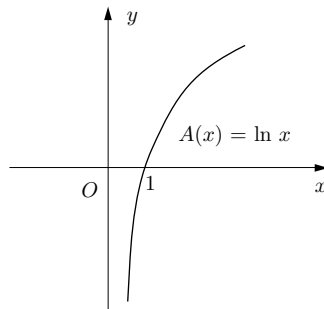
non si è invertito il segno di disuguaglianza, perchè la funzione $A(x) = \ln x$ è *monotona crescente*.

Si ottiene:

$$2x-1 \leq 0$$

e dunque

$$x \leq \frac{1}{2}.$$



7. GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

7.1 Alcuni elementi introduttivi

Ricordiamo alcune definizioni:

Definizione 7.1.1 – Si chiama **angolo** ciascuna delle due parti di un piano in cui esso viene diviso da due semirette uscenti da uno stesso punto (le due semirette sono incluse).

Il punto si chiama *vertice*, le semirette si chiamano *lati*.

Definizione 7.1.2 – Si chiama angolo **radiante** l'angolo al centro di una circonferenza, che sottende un arco lungo quanto il raggio.

L'unità pratica di misura degli angoli è il grado, quella teorica è il radiante.

Il passaggio da una misura all'altra si effettua mediante la proporzione

$$360: 2\pi = y: x$$

dove x indica la misura in radianti, y quella in gradi, dello stesso angolo; da questa proporzione si ricavano le formule

$$x = \frac{\pi}{180}y \quad \text{e} \quad y = \frac{180}{\pi}x$$

che danno rispettivamente la misura in radianti, nota quella in gradi, e la misura in gradi, nota quella in radianti.

Definizione 7.1.3 – Si chiama angolo orientato quello i cui lati sono considerati in un certo ordine.

Indichiamo con $\widehat{ab}$ l'angolo orientato, dove a è il primo lato, b il secondo.

Definizione 7.1.4 – L'angolo $\widehat{ab}$ si dice convenzionalmente **positivo** quando è descritto dal lato origine a con una rotazione **antioraria** attorno al vertice; si dice **negativo** quando è descritto dal lato origine a con una rotazione **oraria** attorno al vertice.

All'angolo positivo si associa la misura positiva, a quello negativo la misura negativa.

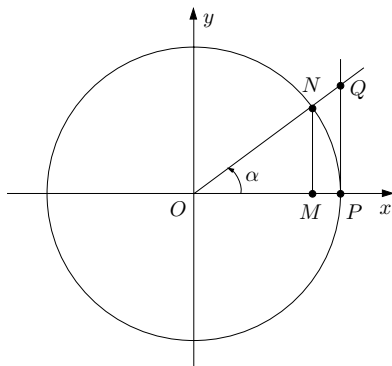
Lo scopo della trigonometria è quello di voler studiare, per via algebrica, un triangolo, nel senso di voler trovare i suoi sei elementi quando ne sono noti tre, fra i quali sia compreso almeno un lato. Nell'affrontare questo problema si incontra subito la difficoltà di trovarsi ad operare con grandezze non tutte omogenee fra di loro: lati ed angoli; si è superato questo ostacolo introducendo, in sostituzione degli angoli, opportuni segmenti orientati le cui misure sono legate a quelle degli angoli in questione; cioè queste misure sono funzioni dell'angolo; tali funzioni sono dette goniometriche (seno, coseno, tangente, ...).

Esaminiamo prima la *goniometria* (misura dell'angolo), definendo le funzioni goniometriche e dando le loro proprietà; tratteremo poi la *trigonometria* (misura del triangolo), dando le formule che legano le misure dei lati di un triangolo ai valori delle funzioni goniometriche degli angoli del triangolo.

7.2 Goniometria

Si chiama cerchio goniometrico un cerchio qualunque il cui raggio sia preso come *unità di misura* in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, con l'origine nel suo centro e l'origine degli archi nel punto d'incontro tra la circonferenza ed il semiasse positivo delle ascisse; tale semiasse è preso come origine degli archi.

Assegnato il cerchio trigonometrico (vedi figura), sia α la misura in gradi o radianti dell'angolo al centro $\widehat{PON}$ orientato e sia $\widehat{PN}$ l'arco corrispondente.



Diremo:

seno di un arco orientato l'ordinata dell'estremo dell'arco; cioè [poiché $\overline{OP} = 1$]

$$\sin \alpha = \overline{MN}$$

coseno di un arco orientato l'ascissa dell'estremo dell'arco; cioè

$$\cos \alpha = \overline{OM}$$

tangente di un arco orientato l'ordinata del punto in cui il prolungamento del raggio che passa per l'estremo dell'arco incontra la tangente al cerchio nell'origine P degli archi; cioè

$$\operatorname{tg} \alpha = \overline{PQ}.$$

Accanto a queste funzioni principali si definiscono le funzioni reciproche; ne ricordiamo soltanto una:

cotangente di un arco orientato è il reciproco della tangente; cioè

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Osserviamo che le funzioni goniometriche sono indipendenti dal cerchio trigonometrico considerato; inoltre ricordiamo che tali funzioni sono numeri reali e quando scriviamo brevemente, per esempio, $\sin \alpha = \overline{MN}$, intendiamo che $\sin \alpha$ è il numero reale che misura, rispetto al raggio, il segmento orientato $\overline{MN}^{(1)}$.

⁽¹⁾Ricordiamo che il verso del segmento orientato $\overline{MN}$ è quello che va da M ad N .

7.3 Variazione e grafico delle funzioni goniometriche

Funzione seno: variazione [α espresso in radianti]

per $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ si ha $0 \leq \sin \alpha \leq 1$; per $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ si ha $1 \geq \sin \alpha \geq 0$

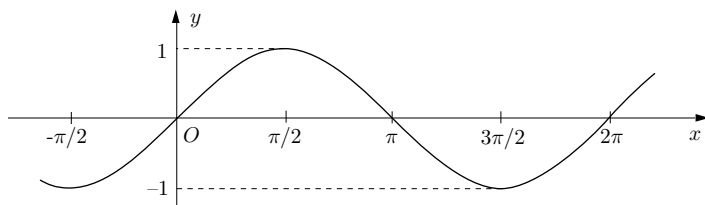
per $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ si ha $0 \geq \sin \alpha \geq -1$; per $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$ si ha $-1 \leq \sin \alpha \leq 0$.

Se il punto N (vedi figura del § 7.2), dopo aver compiuto un angolo giro, continua il suo movimento descrivendo un secondo giro, esso passa per le posizioni precedenti, per cui il seno riprende i valori precedenti; analogamente per tutti gli eventuali k ($k \in \mathbb{Z}$) giri successivi; cioè si ha

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$$

e si dice che la funzione seno è periodica, con periodo 2π , cioè se si aumenta o si diminuisce un arco di $2k\pi$, il seno dell'arco non cambia.

Grafico del seno: $y = \sin x$



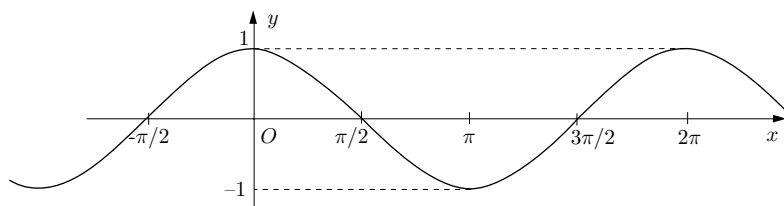
Funzione coseno: variazione

per $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ si ha $1 \geq \cos \alpha \geq 0$; per $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ si ha $0 \geq \cos \alpha \geq -1$

per $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ si ha $-1 \leq \cos \alpha \leq 0$; per $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$ si ha $0 \leq \cos \alpha \leq 1$.

La funzione coseno è periodica di periodo 2π , cioè $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$.

Grafico del coseno: $y = \cos x$



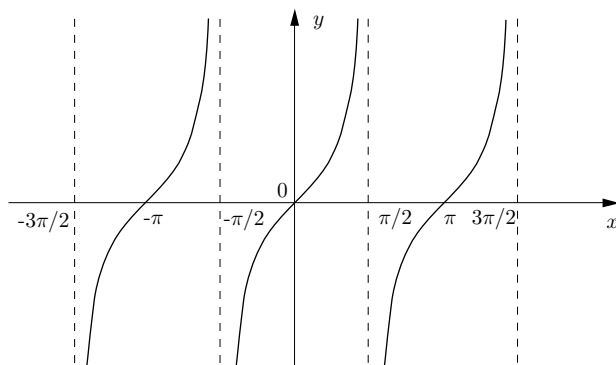
Funzione tangente: variazione

per $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ si ha $0 \leq \operatorname{tg} \alpha < +\infty$; per $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ si ha $-\infty < \operatorname{tg} \alpha \leq 0$;

per $\pi \leq \alpha < \frac{3}{2}\pi$ si ha $0 \leq \operatorname{tg} \alpha < +\infty$; per $\frac{3}{2}\pi < \alpha \leq 2\pi$ si ha $-\infty < \operatorname{tg} \alpha \leq 0$.

La funzione tangente è periodica di periodo π , cioè $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha$.

Grafico della tangente: $y = \operatorname{tg} x$; $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$



7.4 Relazioni tra le funzioni goniometriche

Dal triangolo rettangolo OMN (vedi figura di § 7.2), per il teorema di Pitagora, risulta la fondamentale relazione

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli OMN e OPQ (vedi figura di § 7.2), risulta

$$\sin \alpha : \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha : 1 \quad \text{da cui} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \text{si ha poi} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Osserviamo che queste relazioni sono state stabilite con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ma si verifica che esse valgono, sia in valore assoluto che in segno, qualunque sia α .

Le relazioni precedenti consentono di esprimere le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente in funzione di una di essa, come risulta dal prospetto seguente

Funzioni goniometriche	In funzione di $\sin \alpha$	In funzione di $\cos \alpha$	In funzione di $\operatorname{tg} \alpha$	In funzione di $\operatorname{cotg} \alpha$
$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}$
$\operatorname{cotg} \alpha$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\operatorname{cotg} \alpha$

Indichiamo poi i valori delle funzioni goniometriche per alcuni archi che intervengono maggiormente nelle applicazioni.

Tralasciamo il loro calcolo e diamo il seguente prospetto

Archi	Funzioni goniometriche			
	seno	coseno	tangente	cotangente
0	0	1	0	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{10} = 18^\circ$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{5} = 36^\circ$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{3\pi}{10} = 54^\circ$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	1	0	$\pm\infty$	0

Riteniamo utile, infine, dare un prospetto con i valori delle funzioni goniometriche in tutti i quadranti in termini di quelli del primo quadrante; cioè $0 \leq \alpha \leq \pi/2$

	$90^\circ \pm \alpha$ $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$ $\pi \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$ $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$	$k \cdot 360^\circ \pm \alpha$ $2k\pi \pm \alpha$
seno	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
coseno	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$
tangente	$\mp \cotg \alpha$	$\pm \tg \alpha$	$\mp \cotg \alpha$	$\pm \tg \alpha$
cotangente	$\mp \tg \alpha$	$\pm \cotg \alpha$	$\mp \tg \alpha$	$\pm \cotg \alpha$

7.5 Formule varie di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli argomenti; formule di prostaferesi

Il problema che ora ci poniamo è il seguente: noti i valori di $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tg \alpha$ e $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\tg \beta$, esistono formule che consentono di calcolare $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\tg(\alpha - \beta)$, dette formule di sottrazione degli argomenti, e quelle che consentono di calcolare $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\tg(\alpha + \beta)$, dette formule di addizione degli argomenti? E ancora, noti i valori di $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tg \alpha$ esistono formule che consentono

di calcolare $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ dette formule di duplicazione dell'argomento, e quelle che consentono di calcolare $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, dette di bisezione?

Non si pensi che se la misura di un angolo si raddoppia, anche il valore della corrispondente funzione goniometrica si raddoppia; cioè *non è vero* in generale che, per esempio, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$; né si pensi che, per esempio, il seno di una somma è uguale alla somma dei seni, cioè *non è vero* che $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$.

La risposta ai problemi di cui sopra è affermativa e si giunge, tralasciando i calcoli, alle seguenti formule:

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Da queste si ricavano poi le formule di triplicazione, per esempio $\sin 3\alpha$, procedendo così:

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha = \\ &= \sin \alpha(1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

Iterando questo procedimento si arriva alle formule, dette di moltiplicazione, che danno il valore delle funzioni goniometriche per $n\alpha$, $n \in \mathbb{N}$.

Formule di bisezione

Queste formule si ricavano da quelle di duplicazione; si ha

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} & \begin{cases} + & \text{se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel I o II quadrante} \\ - & \text{se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel III o IV quadrante} \end{cases} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} & \begin{cases} + & \text{se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel I o IV quadrante} \\ - & \text{se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel II o III quadrante} \end{cases} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} & \begin{cases} + & \text{se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel I o III quadrante} \\ - & \text{se } \frac{\alpha}{2} \text{ è nel II o IV quadrante.} \end{cases} \end{aligned}$$

Formule parametriche

Queste formule si ricavano da quelle di duplicazione ed esprimono $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$ in funzione di $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; si ha

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Formule di prostaferesi

Per calcolare una espressione mediante i logaritmi è opportuno che sia monomia, cioè che non contenga le operazioni di addizione e sottrazione; è quindi utile disporre di formule che trasformano in prodotti le somme o differenze di funzioni goniometriche.

Le formule che si danno in proposito, sono dette di *prostaferesi*, si ricavano da quelle di addizione e sottrazione, e sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

7.6 Trigonometria: relazioni fra gli elementi di un triangolo

Lo scopo della trigonometria è, come accennato sopra, quello di risolvere un triangolo; cioè dati alcuni elementi, lati ed angoli che bastano a determinarlo, trovare gli altri. Pertanto è necessario dare le formule che legano le misure dei lati di un triangolo ai valori delle funzioni goniometriche degli angoli del triangolo.

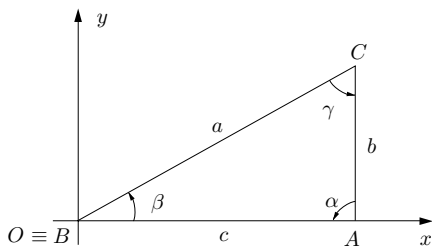
Triangolo rettangolo

Consideriamo un triangolo rettangolo, (vedi figura), dove indichiamo con A , B , C i vertici, con a , b , c le misure geometriche dei lati opposti ai vertici, con α , β , γ le misure positive degli angoli opposti ai lati.

Ricordando le definizioni date sopra possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, & \cos \beta &= \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}; \end{aligned}$$

poiché il rapporto di due segmenti è uguale al rapporto delle loro misure, possiamo scrivere



$$\sin \beta = \frac{b}{a}, \quad \cos \beta = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}$$

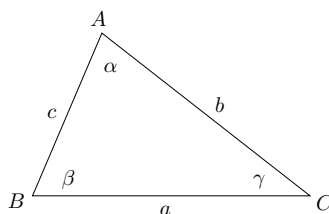
e quindi

$$b = a \sin \beta, \quad c = a \cos \beta, \quad b = c \operatorname{tg} \beta$$

e si dice che in un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente al cateto stesso; un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo ad esso opposto.

7.7 Triangolo qualunque

Consideriamo un triangolo qualunque (vedi figura). Per le misure dei suoi lati a , b , c e le ampiezze dei suoi angoli α , β , γ vale il seguente



Teorema dei seni — *In un triangolo qualunque, le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti:*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Diamo poi il seguente

Teorema delle proiezioni — *In un triangolo qualunque, la misura di ogni lato è uguale alla somma dei prodotti delle misure degli altri due lati moltiplicate per il coseno dell'angolo compreso tra questo ed il lato considerato:*

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta.$$

Analogamente per b e c .

Da questo teorema segue il

Teorema di Carnot — *In un triangolo qualunque, il quadrato della misura di ogni lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due, diminuita del doppio prodotto delle misure di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Analogamente per b^2 e c^2 .

Osserviamo che per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ha $a^2 = b^2 + c^2$, cioè il teorema di Pitagora.

Dal teorema di Carnot e dalle formule di bisezione si ricavano le seguenti

Formule di Briggs

Posto $\frac{a+b+c}{2} = p$, si ha

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Analogamente per $\sin \frac{\beta}{2}$, $\sin \frac{\gamma}{2}$, $\cos \frac{\beta}{2}$, $\cos \frac{\gamma}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ ottenute permutando circolarmente a, b, c e α, β, γ .

Esempio

Risolvere un triangolo dati i tre lati; cioè assegnati a, b, c vogliamo trovare α, β, γ .

Per trovare α utilizziamo la formula di Briggs $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, da cui calcolando per logaritmi si ha

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \{ \log(p-b) + \log(p-c) - \log p - \log(p-a) \}$$

e da questa, con l'uso delle tavole, si ricava α ; si procede analogamente per trovare β e γ .

7.8 Area di un triangolo qualunque

Per il calcolo dell'area di un triangolo qualunque (vedi figura § 7.7), si può fare uso di una delle formule che vengono date qui di seguito.

1. L'area S di un triangolo qualunque è uguale al semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Analogamente per gli altri lati ed angoli.

2. Da questa formula, mediante le formule di duplicazione e quelle di Briggs si trova, per l'area S :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2},$$

detta formula di Erone.

Osserviamo che l'aspetto peculiare da rilevare in questa formula sta nella dipendenza dell'area di un triangolo dalla sola lunghezza dei suoi lati. Ciò non deve meravigliare; il lettore sa che dati tre lati, il triangolo è perfettamente individuato.

7.9 Alcuni esempi

Assegnato un triangolo qualunque (vedi figura), vogliamo trovare le misure dell'altezza $\overline{AH}$, della mediana $\overline{AM}$, della bisettrice $\overline{AN}$.

Misura dell'altezza $\overline{AH} = h_a$

Dal triangolo AHB risulta $h_a = c \sin \beta$; per le formule di duplicazione si ha $\sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$, e per le formule di Briggs si può scrivere

$$\sin \beta = 2 \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} = \frac{2}{ac} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{ac} S;$$

quindi $h_a = c \cdot \frac{2}{ac} S \Rightarrow h_a = \frac{2}{a} S$; analogamente per le altezze h_b , h_c relative ai lati b , c .

Misura della mediana $\overline{AM} = m_a$

Sia φ l'angolo acuto che $\overline{AM}$ forma con $\overline{BC}$, l'angolo adiacente sarà $180^\circ - \varphi$; i due angoli avranno coseni uguali in valore assoluto ma di segno contrario. Applicando il teorema di Carnot ai triangoli ABM e AMC , risulta

$$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + 2 \frac{a}{2} m_a \cos \varphi \quad \text{e} \quad c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \frac{a}{2} \cos \varphi.$$

Sommando membro a membro

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

da cui

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$

analogamente per le mediane m_b , m_c relative ai lati b , c .

Misura della bisettrice $\overline{AN} = b_\alpha$

Considerando il triangolo ABC come unione dei triangoli ABN e ANC si ha

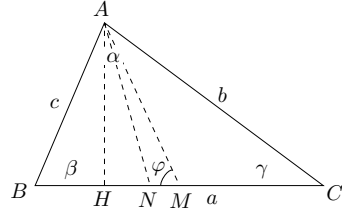
$$\frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} cb_a \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} bb_a \sin \frac{\alpha}{2}$$

e per la $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ sostituendo e semplificando si ha

$$2bc \cos \frac{\alpha}{2} = b_a(b+c)$$

da cui

$$b_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}$$



e ricordando le formule di Briggs per $\cos \frac{\alpha}{2}$, risulta

$$b_a = \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)};$$

analogamente per le bisettrici b_β , b_γ relative agli angoli β, γ .

INDICE ANALITICO

- angolo, 70
 - orientato, 70
- annullamento del prodotto, 5
- area di un triangolo, 78
- ascissa, 3

- baricentro del triangolo, 30

- cerchio,
 - goniometrico, 71
 - trigonometrico, 71
- circonferenza, 45
- classi contigue, 8
- concavità,
 - a destra, 42
 - a sinistra, 42
 - verso l'alto, 38
 - verso il basso, 38
- coordinate cartesiane, 3
- coppia ordinata, 3

- differenza di due insiemi, 3
- discriminante, 20
- disequazioni, 60
 - equivalenti, 68
 - lineari, 60
 - quadratiche, 61
 - prodotto, 63
- distanza,
 - punto-retta, 37
 - tra due punti, 28
- divisione, 5
 - tra polinomi, 12

- elementi neutri, 5
- elemento di separazione, 8
- elevamento a potenza, 7
- ellisse, 49
- equazione,
 - esponenziale, 9
 - riducibile, 20
- equazioni,
 - di grado superiore, 23
 - di secondo grado, 18

- famiglia,
 - x^α , 55
 - $y = \log_a x$, 58
 - $y = a^x$, 57
 - $y = 1/x^\alpha$, 56
- formula,
 - di Erone, 78
 - ridotta, 22
- formule,
 - di addizione e sottrazione, 75
 - di bisezione, 75
 - di Briggs, 78
 - di duplicazione, 75
 - di prostaferesi, 76
 - di sdoppiamento, 54
 - parametriche, 76
- funzioni $y = a \sin bx$, 59

- grado, 70
- grafico delle funzioni goniometriche, 72

- insieme, 1
 - complementare, 2
 - discreto, 7
 - vuoto, 2
- intersezione di due insiemi, 2
- intersezioni,
 - tra una circonferenza ed una retta, 46
 - tra una parabola ed una retta, 39
- iperbole, 52
 - equilatera, 52

- legge di tricotomia, 4
- logaritmo, 9

- numeri,
 - complessi, 11
 - interi assoluti, 5
 - naturali, 4
 - razionali, 6
 - reali, 7
 - relativi, 6
- numero,
 - irrazionale, 8
 - periodico, 10
 - reale, 8
- opposto, 7
- ordinata, 3
- parabola con asse verticale, 38
- previsione del resto, 15, 23
- prodotto cartesiano, 3
- proprietà,
 - associativa, 5
 - commutativa, 5
 - distributiva, 5
 - geometriche dell'ellisse, 49
 - geometriche dell'iperbole, 53
- punto,
 - d'incontro di due rette, 33
 - medio del segmento, 29
- quantificatore,
 - esistenziale, 1
 - universale, 1
- quoziente, 13
- radiante, 70
- radice aritmetica, 9
- rappresentazione,
 - decimale, 10
 - parametrica della retta, 33
- reciproco, 7
- regola di Ruffini, 14
- relazioni,
 - fra gli elementi di un triangolo, 76
 - tra le funzioni goniometriche, 73
- resto, 13
- Retta,
 - congiungente due punti, 31
 - esterna, 40
 - secante, 39
 - tangente, 39
- rette,
 - parallele, 35
 - perpendicolari, 36
- simboli connettivi, 1
- sottrazione, 5
- teorema,
 - dei seni, 77
 - delle proiezioni, 77
 - di Carnot, 77
 - di Pitagora, 77
- unione di due insiemi, 2
- valore assoluto, 9

SIMBOLI MATEMATICI DI USO COMUNE

Alfabeto greco (Maiuscola, minuscola/e, nome)

A α	alfa	H η	eta	N ν	nu	T τ	tau
B β	beta	$\Theta \theta, \vartheta$	theta	$\Xi \xi$	csi	$\Upsilon \upsilon$	ippsilon
$\Gamma \gamma$	gamma	I ι	iota	O o	omicron	$\Phi \phi, \varphi$	fi
$\Delta \delta$	delta	K $\kappa, \mathscr{K}$	cappa	$\Pi \pi$	pi	X χ	chi
E ϵ, ε	epsilon	$\Lambda \lambda$	lambda	P ρ, ϱ	ro	$\Psi \psi$	psi
Z ζ	zeta	M μ	mu	$\Sigma \sigma, \varsigma$	sigma	$\Omega \omega$	omega

Relazioni binarie (Relazioni tra due oggetti a e b ; es: $a < b$ si legge a minore di b)

$<$	minore	$>$	maggiore
$\leq$	non maggiore (minore o eguale)	$\geq$	non minore (maggiore o eguale)
$\ll$	molto minore	$\gg$	molto maggiore
$\leq \geq$	minore, uguale o maggiore	$\geq \leq$	maggiore, uguale o minore
$=$	eguale	$\equiv$	coincidente, identico
$+$	più	$-$	meno
$\pm$	più o meno	$\mp$	meno o più
$\sim$	simile	$\simeq$	simile o eguale
$\approx$	approssima	$\propto$	proporzionale a
$\in$	appartiene (a appartiene a b)	$\ni$	appartiene (b appartiene ad a)
$\perp$	perpendicolare	$\parallel$	parallelo
$\Rightarrow$	implica	$\Leftrightarrow$	se e solo se

Tutte le relazioni si *negano* barrandole con $/$; ad es: $a \neq b$ si legge: a *diverso da* (*non* uguale a) b , $a \notin b$: a *non* appartiene a b , ecc.

Simboli diversi

$\sum$	sommatoria	$\prod$	produttorio
∂	derivazione parziale	$\int$	integrale
$\forall$	per ogni	$\exists$	esiste
$\exists!$	esiste ed è unico	$\nexists$	non esiste
∞	infinito	$!$	fattoriale
∇	nabla	$\triangle$	laplaciano
$\aleph$	alef (potenza del continuo)	$\aleph_0$	alef con zero (potenza dei naturali)

Operazioni e relazioni relative agli insiemi

$\cup$	unione	$\cap$	intersezione
$\subset, \subsetneq$	contenuto propriamente	$\supset, \supsetneq$	contenente propriamente
$\subseteq$	contenuto (contenuto o eguale)	$\supseteq$	contenente (contenente o eguale)
$\complement, \mathcal{C}$	complementare	∂	frontiera di

Notazioni per alcuni insiemi standard

$\mathbb{N}$	Insieme dei naturali	$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}$ completato con lo zero
$\mathbb{Z}$	insieme degli interi	$\mathbb{Q}$	insieme dei razionali
$\mathbb{R}$	insieme dei reali	$\mathbb{C}$	insieme dei complessi
$\emptyset$	insieme vuoto (non contenente alcun elemento)		

Finito di stampare nel mese di febbraio del 2005
dalla tipografia « Grafica Editrice Romana S.r.l.» di Roma
per conto della « Aracne editrice S.r.l. » di Roma

